

# LA MATEMATICA NELLA SOCIETÀ DELLA CONOSCENZA: COSA INSEGNARE E COME INSEGNARLO

Mathematics in the knowledge society:  
what to teach and how to teach it

Giampaolo Chiappini | Istituto per le Tecnologie Didattiche, CNR  
✉ Via De Marini 6, 16149, Genova | chiappini@itd.cnr.it

Le grandi trasformazioni tecnologiche e sociali che hanno caratterizzato le ultime decadi hanno posto la necessità di attuare cambiamenti profondi nella formazione matematica degli studenti. Sino a pochi decenni fa la matematica che veniva insegnata alla maggioranza degli studenti era una matematica fatta soprattutto di tecniche, calcoli e algoritmi e questo tipo di formazione appariva abbastanza adeguata per le esigenze di una società industriale.

Questo modello di insegnamento ha cominciato ad entrare in crisi con l'esplosione della rivoluzione tecnologica e informatica e con lo sviluppo di quella che è stata definita società della conoscenza.

Nella società della conoscenza, l'insegnamento della matematica si deve misurare con nuove esigenze culturali, per consentire a strati molto più ampi della popolazione di applicare conoscenze matematiche più complesse che nel passato (che includono la capacità di usare modelli, padroneggiare relazioni e strutture), nelle variegate situazioni in cui alle persone è richiesto di usarle. Inoltre, deve ridefinire i propri obiettivi e metodi, in quanto l'incorporazione nel calcolatore di tecniche automatiche per l'attività matematica rende banali la soluzione di un ampio spettro di compiti che tradizionalmente sono stati al centro della pratica didattica (si pensi, per esempio, alla manipolazione di espressioni algebriche, alla soluzione di equazioni o disequazioni, alla rappresentazione di funzioni che oggi possono essere realizzate

in modo automatico attraverso l'uso di un solo comando).

Oggi tutti concordano sul fatto che la formazione matematica non può più limitarsi allo sviluppo di tecniche matematiche. Eppure, se si analizzano gli attuali manuali scolastici di matematica della scuola secondaria e si confrontano con quelli di 30-40 anni fa, non si notano grandi differenze, se si escludono alcuni argomenti quali la probabilità e la statistica, un tempo non inclusi nel curriculum scolastico. La matematica, quindi, continua ad essere insegnata in modo non molto diverso che nel passato, anche se le esigenze formative oggi sono profondamente cambiate.

Infatti, nella società della conoscenza, le persone devono confrontarsi costantemente con una miriade di compiti che implicano concetti di tipo quantitativo, spaziale, probabilistico, simbolico o altri tipi di concetti matematici e che comportano spesso l'uso di determinati strumenti per l'attività matematica. Per risolvere questi compiti non è sufficiente conoscere tecniche matematiche standard; occorre anche saperle applicare e saperle controllare ad un più alto livello di astrazione, anche al fine di un uso appropriato degli strumenti digitali per l'attività matematica oggi disponibili (fogli elettronici, Computer Algebra System, software di geometria dinamica o per la rappresentazione di funzioni numeriche, ecc.).

Come noto, il test internazionale PISA relativo all'apprendimento matematico, condotto nei paesi dell'OCSE, viene realizzato per verificare e misurare la capacità degli studenti quindicenni di questi paesi di usare strumenti e tecniche matematiche per risolvere problemi della realtà, interpretare o fare previsioni di fatti o fenomeni del mondo reale. I risultati conseguiti dagli studenti italiani nei test PISA relativi all'apprendimento in campo matematico sono piuttosto deludenti, segno di una incapacità della scuola italiana di sviluppare questo tipo di competenze.

Perché questi scarsi risultati? Forse perché la pratica

didattica è ancora troppo centrata sullo sviluppo delle tecniche di calcolo e poco sulla loro applicazione, o ci sono anche altre ragioni?

A parer mio, per costruire la capacità di applicare tecniche matematiche nella soluzione di problemi del mondo reale, è necessario che gli studenti si appropriino di conoscenze e capacità di controllo, ad esse relative, più avanzate sul piano epistemico, rispetto a quelle che la scuola oggi è in grado di promuovere. Infatti, per usare una tecnica matematica nella soluzione di problemi del mondo reale non è sufficiente solo imparare come essa funziona ma occorre anche appropriarsi del suo valore epistemico, che è definito dalla rete di nozioni coinvolte nel suo uso e da come essa può essere giustificata sul piano teorico. Questo valore contribuisce a determinare la potenzialità della tecnica anche sul piano operativo e interpretativo.

Per comprendere meglio cosa significa appropriarsi del valore epistemico di una tecnica, consideriamo l'insegnamento dell'algebra.

La didattica dell'algebra continua ad essere centrata sulle tecniche di trasformazione algebrica secondo una prospettiva di apprendimento meccanico di regole. Per esempio, è noto che nei primi due anni della scuola secondaria di secondo grado si spende molto tempo per cercare di sviluppare la capacità di usare correttamente regole del calcolo letterale, quali, per esempio, il quadrato del binomio:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Con l'insegnamento attuale lo sviluppo di questa capacità si realizza attraverso esercizi meccanici e ripetitivi. Osservo che questo approccio didattico non consente di compiere riflessioni di natura epistemica che invece sono necessari per risolvere il seguente compito:

*Completa la seguente uguaglianza  $(a + 1)^2 = \dots$  in modo che essa sia rispettivamente:*

- vera per ogni valore di  $a$
- falsa per ogni valore di  $a$
- vera solo per alcuni valori di  $a$

Per risolvere questo compito occorre padroneggiare una rete estesa di nozioni e di conoscenze molto importanti sul piano epistemico, quale quello di valore di verità di un'uguaglianza algebrica, di identità, di uguaglianza condizionata, di quantificatore universale e di quantificatore esistenziale.

La didattica attuale relativa al quadrato del binomio e delle equazioni non favorisce lo sviluppo di riflessioni intorno a tali nozioni tali da mettere gli studenti nelle condizioni di affrontare con successo il compito in esame. È importante osservare che queste riflessioni non sono importanti solo sul piano culturale ma anche su quello operativo, in quanto contribuiscono ad una piena padronanza delle tecniche nella soluzione di problemi.

Quanto detto ha importanti conseguenze per l'insegnamento dell'algebra. A titolo di esempio, osservo solo che oggi, nell'approccio all'algebra, oltre ad ap-

prendere nuove regole di calcolo, è di fondamentale importanza appropriarsi del fatto che i simboli algebrici possono rappresentare non solo i numeri usati in aritmetica, ma anche altri numeri, quali i numeri negativi. Inoltre, è importante capire che le operazioni dell'aritmetica non sono solamente trasferite nel nuovo sistema di segni dell'algebra, ma occorre riconoscere che il loro significato e il loro campo di applicazione può risultare esteso con il passaggio all'algebra. È importante anche costruirsi un'idea di cosa sia un'espressione letterale e imparare a riconoscere, nella forma di un'espressione, specifiche proprietà degli oggetti che essa denota. Infine, è importante comprendere che se due espressioni sono tra loro uguali per qualsiasi valore della variabile, ciò può essere dimostrato attraverso l'uso di regole di trasformazione che garantiscono la preservazione dell'equivalenza nella trasformazione.

Ritengo utile rimarcare che è solo attraverso riflessioni di natura epistemica di questo tipo che gli studenti possono appropriarsi delle forme di controllo necessarie per padroneggiare pienamente le espressioni algebriche su vari piani nella soluzione di problemi, e più precisamente:

- sul piano numerico, con lo sviluppo del controllo su ciò che l'espressione denota. L'esempio relativo al quadrato del binomio sopra riportato illustra chiaramente la natura di questo controllo;
- sul piano della forma, con lo sviluppo della capacità di riconoscere proprietà incorporate nella forma di un'espressione. Si consideri, per esempio, il seguente compito:

*Se  $x$  e  $p$  sono numeri naturali, valuta se la seguente uguaglianza  $(2x + 1) \cdot (2x + 3) = 2p + 2$  è vera, falsa, vera per alcuni valori di  $x$  e  $p$  e falsa per altri valori.*

Per capire che l'uguaglianza è falsa per qualsiasi valore di  $x$  e di  $p$  è necessario esercitare uno stretto controllo sulle proprietà incorporate nella forma delle espressioni che costituiscono l'uguaglianza e riconoscere che le forme  $(2x + 1)$  e  $(2x + 3)$  rappresentano numeri dispari, che il loro prodotto è, quindi, necessariamente dispari, mentre la forma  $2p + 2$  denota un numero pari;

- sul piano sintattico, con lo sviluppo della capacità di usare e giustificare le regole di trasformazione che possono essere applicate su un'espressione algebrica e che garantiscono l'equivalenza nella trasformazione. Per esempio, è profondamente diverso il controllo di tipo sintattico che occorre compiere nel risolvere l'equazione  $5x + 3 = 4x + 1$  rispetto a quello necessario per svolgere il seguente compito:

*Considera la seguente soluzione di equazione di primo grado:  $x = 2$*

*Completa la seguente uguaglianza di cui essa è soluzione  $5x + 3 = \dots$*

Nel primo caso è sufficiente un controllo di tipo ope-

rativo sull'applicazione della procedura standard di soluzione dell'equazione di primo grado. Nel secondo caso è necessario un pieno controllo delle proprietà delle uguaglianze e delle operazioni sul piano dei significati per introdurre nel corpo dell'uguaglianza  $x = 2$  le forme algebriche ausiliare che sono necessarie per ricostruire il testo dell'equazione.

Gli esempi riportati in questo breve scritto sono stati elaborati nell'ambito della ricerca didattica e sono molto utili per verificare se gli studenti si sono appropriati del valore epistemico di alcune tecniche algebriche. Rimane aperto il problema di come favorire lo sviluppo di una riflessione di natura epistemica sulle tecniche che si vogliono far apprendere. Ritengo che una pratica didattica di natura trasmissiva o centrata su esercizi ripetitivi e meccanici non consenta di ottenere ciò. Penso, inoltre, che elaborare buone situazioni didattiche come quelle degli esempi riportati sia sicuramente importante, ma per consentire agli studenti di affrontarle sviluppando realmente le riflessioni di tipo epistemico necessarie per la loro soluzione, occorrono efficaci strumenti di mediazione.

A parer mio, per favorire lo sviluppo di questa riflessione è necessario compiere esperienze significative in una sorta di Laboratorio Didattico di Matematica, che si può strutturare solo attraverso l'uso di appropriati strumenti.

In generale, un *laboratorio* è uno spazio fenomenologico caratterizzato da possibilità operative e rappresentative offerte dagli strumenti in esso disponibili, dove "può essere portata" una certa realtà per essere meglio studiata. Attraverso i mezzi operativi e rappresentativi del laboratorio vengono costruite le fenomenologie della realtà al centro dell'indagine, che consentono di interpretarla più efficacemente.

La nozione di *laboratorio* può essere usata anche per scopi didattici. In questa prospettiva la nozione indica una modalità didattica attraverso la quale è possibile attuare una riflessione di natura epistemica su specifiche nozioni matematiche, più efficace di quella che potrebbe essere realizzata nella pratica didattica ordinaria. Parliamo in questo caso di Laboratorio Didattico di Matematica (LDM). Nel LDM, quindi, la realtà che si vuole indagare è costituita da una o più nozioni matematiche. L'artefatto che struttura il LDM rende disponibili mezzi operativi e rappresentativi differenti da quelli di natura logico simbolica usati tradizionalmente per rappresentare tali nozioni. I mezzi operativi e rappresentativi del laboratorio consentono di costruire fenomenologie delle nozioni matematiche in gioco che possono essere controllate sul piano percettivo, spaziale e motorio, oltre che su quello logico e simbolico. Le fenomenologie costruite con tali mezzi reificano proprietà che caratterizzano la nozione al centro dell'indagine, e ciò può favorire la costruzione di significati appropriati per tale nozione.

Per esempio, in AINuSet, un ambiente didattico per l'algebra dinamica (si veda a tale riguardo il numero 46 di TD), le variabili algebriche sono punti mobili trascinabili con il mouse sulla retta dei numeri e quest'ultima può essere istanziata nei vari domini numerici. Questa possibilità operativa e rappresentativa può essere messa facilmente in corrispondenza con la proprietà della variabile di rappresentare gli elementi di un insieme numerico in modo indeterminato. AINuSet consente, inoltre, di rappresentare espressioni algebriche sulla retta dei numeri, associandole a punti, la cui posizione dipende dal valore della variabile durante il trascinamento. Questa possibilità operativa e rappresentativa struttura facilmente un'idea della relazione funzionale che si stabilisce tra la variabile e l'espressione che la contiene e può essere sfruttata per costruire fenomenologie che possono essere messe in corrispondenza con numerosi significati dell'espressioni algebriche, quali quello di espressione equivalente, di espressione opposta, di espressione reciproca. Consente, ancora, di associare ad ogni proposizione algebrica un marcatore che può essere verde o rosso a seconda che la proposizione sia rispettivamente vera o falsa in base al valore delle variabili sulla retta. Questa fenomenologia consente di discutere con molta naturalezza con gli studenti della nozione di valore di verità di una proposizione e può essere sfruttata per costruire numerosi altri importanti significati quali quelli di identità, di uguaglianza condizionata, di quantificatore universale e esistenziale. I pochi esempi riportati mostrano che questo software può essere molto utile per realizzare attività di LDM nelle quali si può realizzare una riflessione di natura epistemica in grado di consentire agli studenti di affrontare con successo i compiti presentati in queste brevi note.

Concludo questa mia riflessione sulla matematica nella società della conoscenza rimarcando che una piena integrazione in questa società richiede una maggiore padronanza della matematica sul piano epistemico e culturale. Un tempo questa padronanza era riservata ad una élite di persone, oggi diventa una necessità per tutti. La democratizzazione della cultura matematica costituisce una sfida epocale per l'istituzione scolastica. La tecnologia può aiutare a vincere questa sfida perché, come si è visto visto, consente di costruire nuove fenomenologie delle nozioni matematiche attraverso le quali l'insegnante e gli allievi possono interagire tra loro sui significati più profondi della disciplina, sfruttando la loro esperienza percettiva e motoria e non solo quella logica e simbolica. Occorre, però, che l'istituzione scolastica raccolga questa sfida e sappia innovare la didattica.

#### LETTURE CONSIGLIATE

Chiappini G., Pedemonte B., Robotti E. (2009). AINuSet: L'Algebra alla portata di tutti. *TD-Tecnologie Didattiche*, 46, pp. 58-61.