

# AlNuSet: l'Algebra alla portata di tutti

- **Giampaolo Chiappini**, CNR - Istituto per le Tecnologie Didattiche & DiDiMa srl
- **Bettina Pedemonte, Elisabetta Robotti**, DiDiMa srl  
[chiappini, pedemonte, robotti]@itd.cnr.it

*Per me questa è algebra!*

Questa espressione è spesso usata nel linguaggio corrente per indicare un argomento di cui non si capisce nulla. In questa espressione, il termine algebra è usato per esprimere un senso che riflette l'esperienza negativa di generazioni di studenti che si sono misurati con l'apprendimento di questo dominio di conoscenza. L'algebra è sempre stata e continua a essere un argomento di studio ostico per gli studenti e difficile da insegnare per i docenti, fatto di regole che vengono insegnate e apprese in modo normativo alle quali, spesso, gli studenti non sono in grado di attribuire alcun senso.

Già nella scuola media agli studenti viene insegnato ad usare il linguaggio dell'algebra, a trattare con la notazione insiemistica, a usare funzioni numeriche. A questi argomenti è dedicato moltissimo tempo nei primi anni della scuola superiore. I risultati sono piuttosto deludenti, vista l'alta percentuale di debiti formativi in matematica che si registrano nella scuola superiore (in particolare nei primi anni), gli scarsi risultati ottenuti dagli studenti nei test internazionali (PISA) o nazionali (INVALSI), la percezione negativa, spesso di fallimento, che molti studenti hanno dello studio effettuato.

Quali sono le cause principali di ciò?

È noto che nell'insegnare e nell'apprendere la matematica a questi livelli scolastici l'uso del

formalismo algebrico assume un ruolo importante. Gli studenti faticano molto a padroneggiarlo perché il suo uso consapevole pone notevoli problemi di costruzione di senso per i suoi simboli e le sue regole. Questa difficoltà non è solo degli studenti di oggi.

Bertrand Russel, grande filosofo e matematico, ricordando il suo approccio all'algebra, ebbe a scrivere: «Quando si arriva all'algebra e si deve operare con  $x$  e  $y$ , nasce il bisogno naturale di sapere cosa sono realmente  $x$  e  $y$ . Ciò, almeno, era quello che io sentivo. Ho sempre pensato che l'insegnante sapesse cosa erano  $x$  e  $y$ , ma che non me l'avrebbe mai detto».

Questa frase di Russel evidenzia in modo molto chiaro l'importanza che assume la costruzione di un senso per i simboli e le regole dell'algebra. Il problema è che per costruire il senso di cosa siano  $x$  e  $y$  (e, più in generale, i simboli algebrici) occorre fare l'esperienza dei differenti oggetti algebrici e numerici che queste due lettere possono rispettivamente rappresentare e indicare. Allora, come adesso, è difficile fare una reale esperienza di ciò attraverso le sole parole dell'insegnante.

Oggi la tecnologia offre nuove opportunità per esplorare e costruire significati matematici anche attraverso un approccio che sfrutta l'esperienza visiva, spaziale e motoria degli studenti.

## NUOVE POSSIBILITÀ OPERATIVE E RAPPRESENTATIVE PER INSEGNARE E APPRENDERE L'ALGEBRA

Nell'ambito di un progetto di ricerca europeo, gli autori di queste note hanno sviluppato AlNuSet, un ambiente digitale che si è dimostrato particolarmente efficace per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento dell'algebra, degli insiemi numerici, delle funzioni e per costruire la padronanza nell'uso del formalismo algebrico.

AlNuSet è costituito da tre ambienti strettamente integrati tra loro: la *Retta Algebrica*, il *Manipolatore Simbolico*, l'ambiente *Funzioni*. Questi ambienti rendono disponibili nuove possibilità operative e rappresentative che possono essere facilmente sfruttate per costruire competenze e significati matematici.

### Retta Algebrica

Alcuni secoli fa i matematici hanno ideato la retta dei numeri per rappresentare l'ordinamento numerico; oggi essa è molto usata anche nella scuola sin dalle elementari per esplorare e studiare proprietà dei numeri (per esempio, per ordinare frazioni). Sfruttando la tecnologia digitale, in AlNuSet la retta dei numeri è stata potenziata con una nuova possibilità operativa che consiste nel poter trascinare con il mouse punti associati a variabili come  $x$  e  $y$ . Con l'implementazione di questa idea e di altre possibilità operative e rappresentative, la retta dei numeri è stata trasformata in Retta Algebrica e si sono aperte nuove possibilità per operare con espressioni algebriche e proposizioni (equazioni, disequazioni,...) attraverso un approccio controllabile sul piano visivo, spaziale e motorio. Operando sulla Retta Algebrica è facile fare esperienza dei significati che possono essere attribuiti a  $x$  e  $y$  o che sono coinvolti nella soluzione di equazioni e disequazioni. Vediamo qualche esempio.

La figura 1 fotografa in modo statico due momenti del trascinamento della variabile  $x$

e la posizione sulla retta algebrica del punto associato ad una espressione che contiene tale variabile.

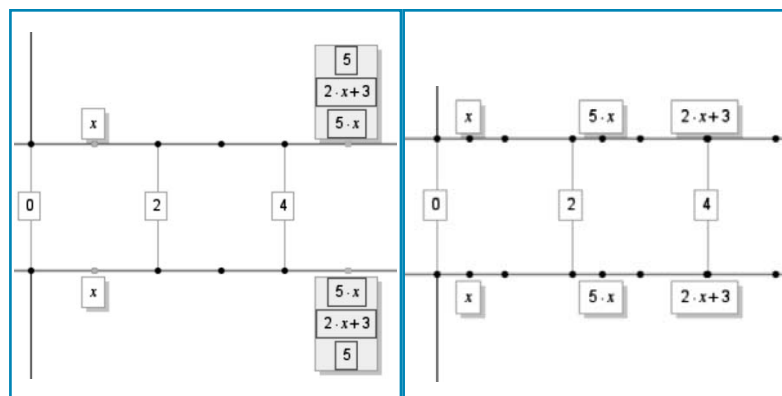
Il trascinamento del punto  $x$  permette di reificare il concetto di variabile. Lo studente può facilmente comprendere che il valore dell'espressione dipende dal valore di  $x$  perché non è possibile trascinare l'espressione con il mouse in quanto è solo attraverso il movimento della variabile  $x$  che si determina il movimento dell'espressione.

Inoltre, con il trascinamento della variabile sulla retta differenti eventi rappresentativi possono essere messi in relazione con specifici significati relativi alla nozione di uguaglianza tra espressioni. Per esempio, può succedere che durante il trascinamento del punto variabile due espressioni indichino lo stesso valore:

- solo per determinati valori della variabile. Nell'esempio della figura 2, l'uguaglianza tra l'espressione  $5 \cdot x$  e  $2 \cdot x + 3$  è condizionata dal valore di  $x$ , nel senso che è vera per  $x=1$  e tale valore costituisce la soluzione dell'equazione  $5 \cdot x = 2 \cdot x + 3$ ;

figura 2

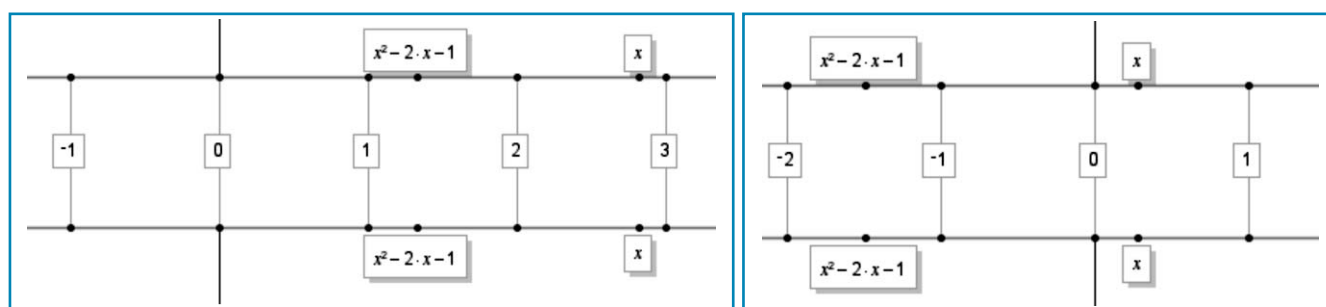
Esempio di uguaglianza condizionata dal valore della variabile  $x$ .

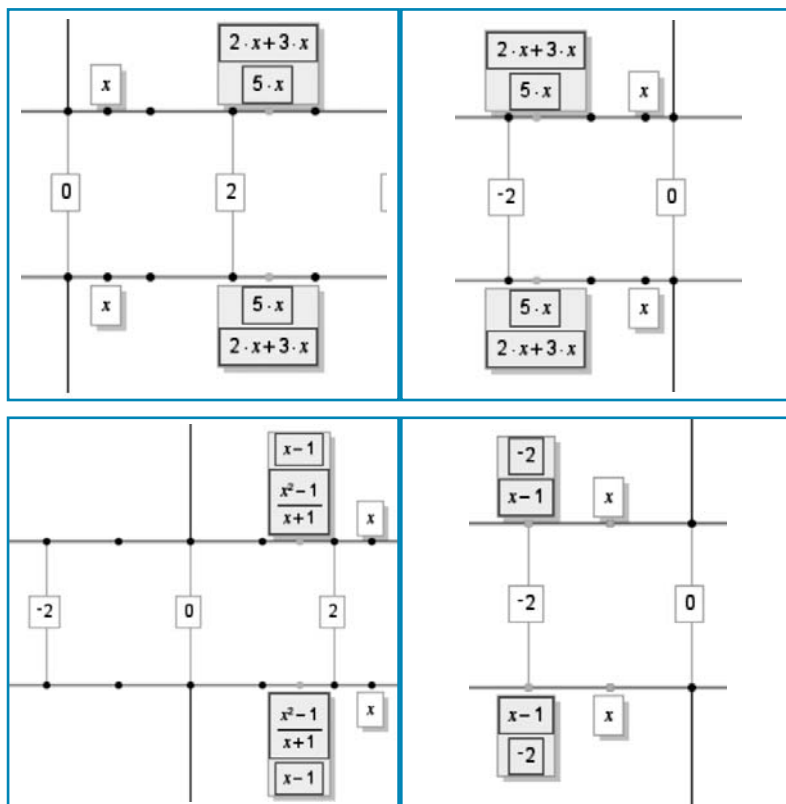


- per tutti i valori della variabile. Nell'esempio della figura 3 le espressioni  $5 \cdot x$  e  $2 \cdot x + 3 \cdot x$  sono equivalenti perché fanno riferimento sempre ad uno stesso punto che varia dinamicamente sulla retta durante il trascinamento della variabile  $x$  e di conseguenza l'uguaglianza  $5 \cdot x = 2 \cdot x + 3 \cdot x$  è un'identità;

figura 1

Due momenti del trascinamento della variabile  $x$  sulla retta algebrica.





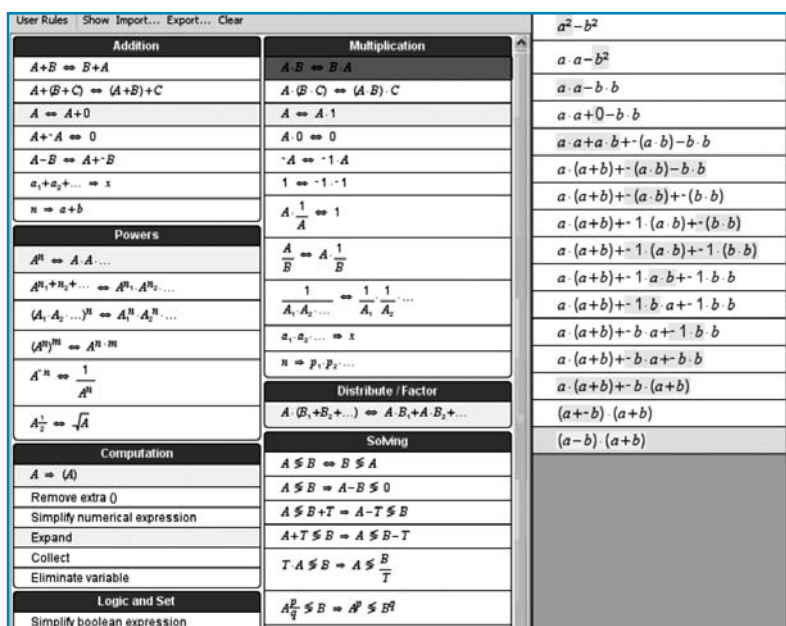
**figura 3**

Esempio del comportamento di espressioni equivalenti durante il trascinamento della variabile  $x$ .

**figura 4**

Esempio di comportamento di espressioni equivalenti con restrizione durante il trascinamento della variabile  $x$ .

- per tutti i valori della variabile, tranne alcuni per i quali una delle due espressioni scompare dalla retta. Nell'esempio riportato in figura 4, tra le espressioni  $x-1$  e  $(x^2-1)/(x+1)$  vi è una relazione di equivalenza con restrizione, nel senso che esse indicano sempre uno stesso punto che varia dinamicamente sulla retta durante il trascinamento della variabile  $x$ , tranne che per  $x=-1$  in cui l'espressione  $(x^2-1)/(x+1)$  scompare dalla retta.



Le caratteristiche dell'ambiente retta algebrica sono specifiche del sistema AlNuSet e rendono possibile un approccio quantitativo e dinamico all'algebra.

*Manipolatore simbolico*

Nell'ambiente Manipolatore Simbolico è possibile attribuire un senso all'attività di trasformazione algebrica attraverso un approccio costruttivo che permetterà allo studente di imparare a giustificare le regole che usa. La figura 5 presenta una parte dei comandi disponibili con l'interfaccia e un esempio di trasformazione algebrica. In questo manipolatore l'attività di trasformazione algebrica inizia con l'uso di regole semplici che fanno riferimento alle proprietà di base delle operazioni. Via via è possibile costruire regole più complesse che possono essere salvate per essere usate in successive trasformazioni. Per esempio, una volta che, con il manipolatore simbolico, si è dimostrata la regola del prodotto notevole  $a^2-b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$  come in figura 5, è possibile aggiungere automaticamente la nuova regola  $a^2-b^2 \Rightarrow (a+b) \cdot (a-b)$  nell'interfaccia per usarla in successive trasformazioni. Un altro specifico comando permette di rappresentare automaticamente sulla retta algebrica ogni espressione trasformata. Attraverso questo comando è possibile verificare quantitativamente il preservarsi dell'equivalenza attraverso la trasformazione, osservando che tutte le espressioni trasformate fanno riferimento ad uno stesso punto che si muove dinamicamente sulla retta durante il trascinamento della variabile.

Le caratteristiche del manipolatore simbolico di AlNuSet sono molto diverse da quelle dei Computer Algebra System (CAS) che sino ad oggi hanno costituito l'unica tipologia di sistemi per la didattica relativa a questo dominio. Rispetto ai CAS, il manipolatore di AlNuSet può essere più facilmente controllato dagli studenti durante l'attività di trasformazione algebrica e può essere meglio sfruttato dagli insegnanti per giustificare e inquadrare sul piano teorico l'attività di manipolazione algebrica.

**figura 5**

Interfaccia del Manipolatore Simbolico di AlNuSet.

### Ambiente Funzioni

La principale caratteristica dell'ambiente funzioni è di collegare operativamente la retta algebrica con il piano cartesiano nel quale, in modo automatico, vengono tracciati i grafici delle espressioni presenti sulla retta.

Questo collegamento operativo permette di integrare una concezione dinamica e unidimensionale con una concezione statica e bidimensionale della nozione di funzione che favorisce lo sviluppo della capacità di leggere e interpretare i grafici di funzioni. L'integrazione dinamica tra retta algebrica e piano cartesiano (vedi figura 6) rende questo ambiente profondamente diverso dagli ambienti di rappresentazione di funzioni nel piano cartesiano attualmente usati in ambito scolastico, compresi quelli dinamici basati sull'uso di slider.

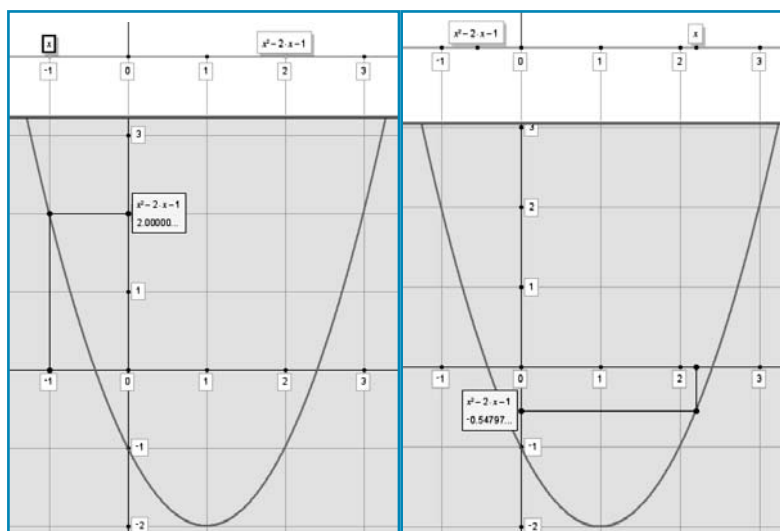
### Azioni di supporto all'integrazione di AlNuSet nel contesto scolastico

Sperimentazioni compiute in Italia e Francia hanno evidenziato che l'uso di AlNuSet può cambiare profondamente l'insegnamento dell'algebra e può migliorarne il suo apprendimento. Gli insegnanti coinvolti nella sperimentazione hanno apprezzato, in particolare, la possibilità di usare nuove funzionalità operative e rappresentative di AlNuSet per discutere con i propri studenti del significato di molte nozioni matematiche. Recenti sperimentazioni stanno anche evidenziando significative possibilità d'uso con studenti che presentano necessità speciali (discalculia).

L'integrazione di AlNuSet nella pratica didattica richiede tuttavia azioni di supporto sul piano della formazione degli insegnanti, della produzione di scenari d'uso e della consulenza in quanto il suo uso può modificare il modo in cui l'algebra è stata sino ad oggi insegnata.

Si pone per AlNuSet, come per tutte le tecnologie innovative, un problema di trasferimento tecnologico.

Per favorire il trasferimento tecnologico di AlNuSet e la sua diffusione nella scuola il team di ricerca che ha realizzato e sperimentato questo sistema ha creato una società spin-off, la società DiDiMa srl (Didattica Digitale della Matematica) che per alcuni anni potrà ave-



**figura 6**

L'ambiente Funzioni di AlNuSet.

re la propria sede presso l'Istituto per le Tecnologie Didattiche del CNR.

DiDiMa cura l'aggiornamento e lo sviluppo del software nonché servizi di consulenza e di formazione on-line per gli insegnanti. Informazioni più dettagliate su DiDiMa e AlNuSet possono essere trovate all'indirizzo <http://www.alnuset.com>

L'esperienza descritta costituisce un esempio paradigmatico di ciclo virtuoso di una ricerca volta a migliorare il sistema di istruzione. In questo campo, forse per la prima volta, per favorire concretamente l'innovazione nel sistema di istruzione, non ci si è limitati solo a sviluppare e sperimentare un prototipo per verificare determinate ipotesi di ricerca ma si è curata anche la fase di trasferimento tecnologico dei risultati conseguiti. Per molto tempo il trasferimento tecnologico è stato demandato al mercato, dove non necessariamente erano presenti le competenze in grado di supportare tale processo. Con la costituzione della società spin-off coloro che hanno progettato, sviluppato e sperimentato in prima persona il sistema AlNuSet mettono le proprie competenze al servizio di insegnanti, scuole e istituzioni per supportare il processo di integrazione del sistema nella pratica didattica, garantendo qualità e continuità nel servizio. Ci auguriamo che ciò possa costituire una efficace modalità in grado di favorire l'integrazione della tecnologia digitale nel sistema scolastico.