

Alnuset

Progettazione e sviluppo di un nuovo sistema per l'apprendimento dell'algebra

- **Giampaolo Chiappini**, CNR - Istituto Tecnologie Didattiche
- **Bettina Pedemonte**, CNR - Istituto Tecnologie Didattiche
- **Elisabetta Robotti**, CNR - Istituto Tecnologie Didattiche
[chiappini, pedemonte, robotti]@itd.cnr.it

INTRODUZIONE

La progettazione di un sistema per scopi educativi si basa sempre su un'analisi approfondita degli ostacoli e delle difficoltà che caratterizzano l'insegnamento della conoscenza di riferimento per quel sistema e delle cause che possono determinarli.

Questa analisi costituisce un riferimento essenziale per compiere specifiche scelte di progettazione e per giustificare tali scelte. Essa, tuttavia, non è il motore dell'elaborazione progettuale di un sistema. In generale, l'elaborazione progettuale di un sistema si basa su una qualche idea, che i progettisti considerano innovativa, di come sfruttare le possibilità offerte dalla tecnologia digitale per rendere disponibili nuove possibilità operative e rappresentative in grado di offrire nuove forme di mediazione per l'apprendimento della conoscenza che si vuole insegnare. Chiaramente, il carattere innovativo di un'idea progettuale dovrà, a posteriori, essere riconosciuto come tale anche da altri, attraverso la verifica della sua efficacia rispetto agli obiettivi di apprendimento per cui il sistema è stato realizzato.

In questo articolo presentiamo le caratteristiche principali del sistema Alnuset, un sistema che abbiamo sviluppato per innovare e migliorare il processo di insegnamento e apprendimento dell'algebra e illustriamo le principali idee progettuali che ne hanno guidato lo sviluppo.

OSTACOLI E DIFFICOLTÀ CHE CARATTERIZZANO L'ALGEBRA INSEGNATA

Il passaggio dall'aritmetica all'algebra è ca-

ratterizzato da ostacoli e difficoltà di apprendimento messi in luce da numerose ricerche didattiche [Arzarello et al., 2001; Harper, 1987; Sfard e Linchevski, 1992]. Si tratta di difficoltà e ostacoli di natura epistemologica, cognitiva e semiotica che emergono quando dall'uso di espressioni e proposizioni numeriche, tipiche dell'aritmetica, si passa ad utilizzare espressioni e proposizioni letterali che caratterizzano l'algebra.

In generale un'espressione matematica è una scrittura composta da numeri e/o lettere connessi dai simboli delle operazioni (addizione, moltiplicazione, sottrazione, divisione, potenza e radice). Se l'espressione è solamente numerica, essa indica, *in modo determinato*, il risultato delle operazioni eseguite in sequenza, mentre se l'espressione è letterale essa indica tale risultato *in modo indeterminato*. In quest'ultimo caso l'espressione può essere vista come una funzione che a ogni valore assunto dalla lettera associa il risultato delle operazioni eseguite in sequenza (per esempio l'espressione $2a+1$ può essere vista come la funzione $f=\{x, 2x+1\}$).

Una proposizione matematica è una scrittura che esprime una relazione tra due espressioni per mezzo dei segni di confronto $=$, $>$ e $<$. Essa indica un valore di verità (vero/falso), che nel caso di proposizioni letterali può essere condizionato dal valore della lettera. Per esempio, in una proposizione numerica ben formata (es: $2*3+2=10-2$) il valore di verità è sempre univocamente determinato, mentre in una proposizione letterale il valore di verità,

tranne i casi di identità, è condizionato dal valore assunto dalle lettere in essa coinvolte (es: $2x-5=x-1$ è vera per $x=4$ mentre è falsa per tutti gli altri valori di x).

Nel passaggio dall'aritmetica all'algebra gli studenti incontrano difficoltà, da una parte a controllare ciò che una espressione letterale indica in modo indeterminato e a riconoscere la proprietà numerica che si rispecchia nella sua struttura di segni e, dall'altra, a comprendere che quando si mette un segno di confronto tra due espressioni letterali la proposizione che si determina può essere vera o falsa a seconda del valore numerico assunto dalle lettere in essa contenute.

A queste difficoltà se ne aggiungono altre che riguardano la capacità di manipolare simbolicamente sia espressioni algebriche, mediante l'uso di regole di trasformazione che fanno riferimento alle proprietà di base delle operazioni di addizione e moltiplicazione e ad altri teoremi di manipolazione dimostrati a partire da tali proprietà, sia proposizioni algebriche, mediante l'uso di regole relative alle proprietà di uguaglianze e disuguaglianze. Le difficoltà degli studenti in questo campo non riguardano solo l'aspetto tecnico di manipolazione simbolica ma anche la comprensione di ciò che si conserva con tali trasformazioni. Osserviamo che questi ultimi aspetti caratterizzano l'algebra come scienza delle operazioni formali e la differenziano dall'aritmetica come scienza delle quantità.

La pratica scolastica attuale non è in grado di favorire il superamento di queste difficoltà in un'alta percentuale di alunni. Il loro superamento richiede pertanto cambiamenti nella pratica scolastica e nuovi livelli di mediazione didattica.

Un primo cambiamento che riteniamo essenziale è l'introduzione nella pratica scolastica di un approccio all'algebra in grado di focalizzare l'attenzione sulle quantità numeriche indicate da un simbolo letterale, da un'espressione letterale o sulle quantità numeriche che condizionano la verità di una proposizione letterale. Chiamiamo *algebra delle quantità* un'algebra di questo tipo. Nella pratica didattica corrente è difficile sviluppare un approccio sistematico basato sull'algebra delle quantità per la mancanza di strumenti in grado di mediare la relazione tra espressioni e proposizioni letterali, da una parte, e quantità numeriche, dall'altra.

Inoltre, riteniamo che l'approccio didattico attuale, essenzialmente centrato sull'algebra delle operazioni formali, debba essere

profondamente trasformato e integrato con un'algebra delle quantità.

Osserviamo che la trasformazione dell'approccio didattico attuale dovrà riguardare innanzitutto l'insegnamento della manipolazione algebrica, oggi volta principalmente all'apprendimento delle regole di trasformazione e al loro consolidamento tecnico. Le nuove pratiche didattiche di manipolazione simbolica dovranno favorire da una parte la soluzione di problemi cognitivi coinvolti nella realizzazione di trasformazioni algebriche e, dall'altra, lo sviluppo dei processi di semiosi che permettono di attribuire significato alle trasformazioni compiute e ai fenomeni algebrici in esse coinvolti. Nella sezione successiva cercheremo di inquadrare e giustificare i principali processi coinvolti nello sviluppo dell'algebra delle operazioni formali dentro il contesto didattico.

PROCESSI COGNITIVI E SEMIOTICI COINVOLTI NELL'ALGEBRA DELLE OPERAZIONI FORMALI

La capacità di manipolare simbolicamente espressioni e proposizioni algebriche ha una grande importanza nel curriculum di matematica e richiede, per essere sviluppata, un numero veramente considerevole di ore a livello soprattutto dei primi 2-3 anni di scuola superiore. I risultati ottenuti sono piuttosto deludenti sul piano dell'apprendimento, vista l'alta percentuale di debiti formativi che caratterizza l'insegnamento della matematica in questi anni scolastici. Le difficoltà degli alunni sono sia di natura cognitiva che semiotica.

Sul piano cognitivo lo sviluppo di questa capacità comporta la soluzione di vari problemi e più precisamente:

- di tipo percettivo, legati al riconoscimento delle unità significanti nell'espressione o nella proposizione che si vuole trasformare;
- di memoria e linguaggio, legati alla strutturazione nella memoria a lungo termine degli schemi d'uso delle varie regole algebriche e alla possibilità di recuperarli e mobilitarli per agire sull'espressione o proposizione algebrica;
- di immaginazione, relativi alla capacità di usare l'esperienza e le acquisizioni del passato per decidere quali schemi mobilitare e in quale combinazione per raggiungere un determinato scopo.

Osserviamo che le espressioni e le proposizioni algebriche sono caratterizzate da una

struttura che può essere anche molto complessa. I problemi cognitivi di percezione, di memoria e linguaggio e di immaginazione che devono essere affrontati per realizzare la trasformazione algebrica di una espressione o proposizione riflettono questa struttura.

Per eseguirne la trasformazione si deve analizzare attentamente la rappresentazione esterna di ciò che si vuole manipolare, per individuare le unità significanti della sua struttura sulle quali poter operare di volta in volta una trasformazione.

Lo studente può incontrare grosse difficoltà a orientare la sua attività percettiva sulla rappresentazione esterna, a focalizzare l'attenzione su alcune parti dell'espressione piuttosto che su altre e a ricostruire la struttura gerarchica delle unità significanti relative all'espressione o alla proposizione su cui opera.

Inoltre, nell'operare una trasformazione risultano mobilitati differenti processi cognitivi interni attraverso i quali lo studente deve usare la sua passata esperienza e regole recuperate dalla sua memoria, per riconoscere nella rappresentazione esterna specifici schemi sui quali poter applicare regole di trasformazione precedentemente apprese.

Imparare a riconoscere specifici schemi nella struttura dell'espressione o proposizione da trasformare e operare con essi, richiede molto tempo ed esercizio, con risultati spesso molto inferiori alle attese.

La soluzione di problemi cognitivi di percezione, di memoria e linguaggio, e di immaginazione descritti, caratterizza l'algebra delle operazioni formali da un punto di vista strumentale, cioè dal punto di vista della capacità di saper realizzare la tecnica operativa. Questo tipo di algebra è però anche caratterizzata dalla soluzione di problemi di natura semiotica che caratterizzano l'algebra delle operazioni formali da un punto di vista epistemico. Dalla soluzione di questi problemi dipendono lo sviluppo dei processi di semiosi che consentono di pianificare una manipolazione algebrica in relazione ad uno scopo e di attribuire significato alle trasformazioni compiute e ai fenomeni algebrici in esse coinvolti.

In questo lavoro useremo il quadro teorico di Peirce per inquadrare questi problemi di natura semiotica [Peirce, 2003].

Il modello semiotico di Peirce è un modello triadico in cui il Segno, inteso come medium della comunicazione, è determinato dal suo Oggetto di riferimento e determina il suo Interpretante. In base a questo modello triadico la costruzione di un significato per gli oggetti algebrici (quali quello di

variabile, incognita, equazione, radice di un polinomio, insieme verità, ecc.) può avvenire attraverso una catena di interpretazioni (potenzialmente infinita) che possono prendere vita attraverso la costruzione di una catena di interpretanti (che sono ancora altri segni).

A seconda della relazione che il segno stabilisce con il suo oggetto di riferimento, Peirce distingue tra icone, indici e simboli.

Quando si opera con il linguaggio algebrico generalmente siamo portati a pensare di operare solo con dei simboli; il linguaggio algebrico è infatti ritenuto il linguaggio simbolico per eccellenza. Osserviamo che nel quadro di Peirce un simbolo è un segno che si riferisce ad un oggetto in virtù di una legge o di una regola che fa sì che esso sia interpretato come riferito a quell'oggetto.

L'aspetto interessante della nozione di simbolo di Peirce consiste nell'osservazione del fatto che dietro una regola, per esempio una regola formale dell'algebra, ci sono sempre dei legami indicali e iconici con l'oggetto rappresentato e con le sue proprietà, legami che emergono attraverso i suoi interpretanti.

Per Peirce, un indice è un segno che si riferisce all'oggetto che denota in base al fatto che è realmente determinato da quell'oggetto, e ciò comporta che esso abbia qualche qualità in comune con quell'oggetto. Quindi l'essere indice di un qualche oggetto implica avere un qualcosa in comune con tale oggetto o, detto con uno specifico termine, implica essere anche in qualche modo icona di tale oggetto.

Un'icona ha una relazione di similarità con l'oggetto di riferimento, cioè il segno e l'oggetto hanno una qualità comune o una struttura comune [Peirce, 2003].

Riteniamo che riconoscere i legami iconici e indicali dietro le regole che caratterizzano i simboli algebrici sta alla base dello sviluppo dei processi di semiosi che permettono la costruzione dei significati in algebra.

Consideriamo per esempio l'espressione $2*x+1$ nel dominio dei numeri naturali; vogliamo usare il modello di Peirce per analizzare i processi coinvolti nel riconoscere cosa indica in modo indeterminato questa espressione in questo dominio numerico.

Per Peirce un'espressione algebrica come questa è innanzitutto un'icona e lo è sulla base delle regole delle operazioni formali che la caratterizzano e che permettono di evidenziare una qualche verità sul suo oggetto di riferimento, per esempio essere successore di "qualcosa", come riflesso nel-

la forma dell'espressione. Ciò di cui l'oggetto è successore è indicato dall'elemento $2 \cdot x$ dell'espressione, cioè il generico numero pari; tale elemento è determinato dalla proprietà dei numeri pari di essere multipli di 2. Quindi l'espressione $2 \cdot x + 1$ riflette iconicamente nella sua forma la proprietà di essere successore di un pari e indica il generico numero dispari. Questo concetto può essere meglio espresso asserendo che l'espressione $2 \cdot x + 1$ è indice del generico numero dispari in quanto la forma dell'espressione è determinata dalla proprietà di questo numero di essere successore di un pari.

Applicando a questa espressione nuove regole quali la proprietà associativa dell'addizione e la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma, è possibile trasformare l'espressione in questa nuova forma: $x + (x + 1)$.

Anche in questa forma l'espressione è indice di un generico numero dispari ma lo è in virtù di un'altra proprietà di questi numeri che si riflette iconicamente nella forma di questa espressione, e cioè quella di essere somma di due numeri consecutivi. Quando ad uno studente si richiede di interpretare espressioni come $2 \cdot x$ o come $2 \cdot x + 1$ o di trasformare l'espressione $2 \cdot x + 1$ per mettere in evidenza che essa rappresenta un numero dispari come somma di due numeri consecutivi risultano coinvolti importanti processi di semiosi implicanti aspetti indicali e iconici come quelli descritti.

Non è facile cogliere il legame iconico che si stabilisce tra regole e convenzioni del linguaggio algebrico da una parte e proprietà astratte dell'oggetto di riferimento dall'altra e neppure comprendere la relazione indicale tra un evento rappresentativo e l'oggetto che lo determina o il fenomeno matematico che lo causa. Invero, lo sviluppo di queste capacità non sono al centro della pratica scolastica corrente. Le spiegazioni, i compiti e i problemi che caratterizzano l'algebra insegnata sono principalmente orientati all'apprendimento del carattere normativo e prescrittivo delle regole e delle convenzioni algebriche piuttosto che al riconoscimento dei loro legami iconici e indicali con gli oggetti di riferimento e con le loro proprietà. Con la pratica didattica corrente gli studenti imparano ad usare correttamente le regole dell'algebra ma mostrano spesso difficoltà ad assegnare significato alle azioni compiute o a giustificarle.

In questo quadro riteniamo che l'integrazione di un'algebra delle quantità con un'algebra delle operazioni formali sia cruciale

per lo sviluppo di una pratica didattica che permetta di vedere, dietro le regole e le operazioni che caratterizzano espressioni e proposizioni algebriche, legami iconici e indicali con proprietà dei loro oggetti di riferimento.

IL SISTEMA ALNUSET

In questa sezione descriveremo il sistema che abbiamo realizzato per consentire lo sviluppo di un'algebra delle quantità nella pratica scolastica e la sua integrazione con un'algebra delle operazioni formali profondamente innovata dal punto di vista didattico. Si tratta del sistema Alnuset (Algebra of NUMerical SETs) sviluppato nell'ambito del progetto comunitario ReMath (IST -4 - 26751) e rivolto a studenti della scuola secondaria di primo e secondo grado.

Alnuset comprende tre ambienti strettamente integrati tra loro e cioè la Retta Algebrica, il Manipolatore Simbolico e il Piano Cartesiano. I primi due ambienti sono stati progettati per favorire lo sviluppo integrato rispettivamente di un'algebra delle quantità e di un'algebra delle operazioni formali. Il terzo ambiente è stato sviluppato per favorire lo sviluppo di un approccio funzionale all'algebra.

Sebbene la rilevanza educativa di questo sistema possa pienamente emergere solo attraverso l'uso integrato di questi tre ambienti, in questo lavoro focalizzeremo l'analisi solamente sui primi due.

RETTA ALGEBRICA DI ALNUSET: CARATTERISTICHE FUNZIONALI E IDEE PROGETTUALI SOGGIACENTI

La Retta Algebrica di Alnuset si basa su una rappresentazione costruita dai matematici alcuni secoli fa, la retta dei numeri, e sfrutta caratteristiche quantitative e visuo-spaziali di quest'ultima per perseguire finalità di tipo algebrico, permettendo in questo modo lo sviluppo di un'algebra delle quantità.

La trasformazione della retta numerica in retta algebrica è stata resa possibile grazie alla tecnologia digitale che ci ha permesso di caratterizzare con una nuova dimensione operativa e rappresentativa la retta dei numeri. Infatti la tecnologia digitale ci ha consentito di associare una lettera ad un punto mobile sulla retta (cioè ad un punto trasciabile con il mouse), e di reificare in questo modo la nozione di variabile algebrica. La tecnologia digitale ha inoltre consentito di sfruttare questa nuova dimensione operativa e rappresentativa della variabile sulla ret-

ta algebrica per reificare anche altri oggetti, processi e relazioni di tipo algebrico e più precisamente per:

- costruire espressioni contenenti variabili algebriche e rappresentarle sulla retta associandole a punti che indicano il risultato dei calcoli eseguiti in sequenza;
- trascinare i punti mobili corrispondenti a variabili algebriche e osservare il movimento corrispondente dei punti delle espressioni contenenti tali variabili;
- ricercare le radici di polinomi a coefficienti interi;
- esplorare e definire insiemi verità di (dis)equazioni e sistemi di (dis)equazioni.

Nel seguito questi aspetti verranno brevemente illustrati e discussi.
a) La retta algebrica rende disponibili tre modelli geometrici per realizzare addizioni/sottrazioni, moltiplicazioni/divisioni, potenze intere/potenze razionali tra due espressioni, per costruire una nuova espressione e rappresentarla sulla retta associandola ad un punto.

Le figure riportate mostrano un esempio di uso di questi tre modelli geometrici per realizzare rispettivamente $x+3$ (figura 1), $3 \cdot x$ (figura 2), x^3 (figura 3).

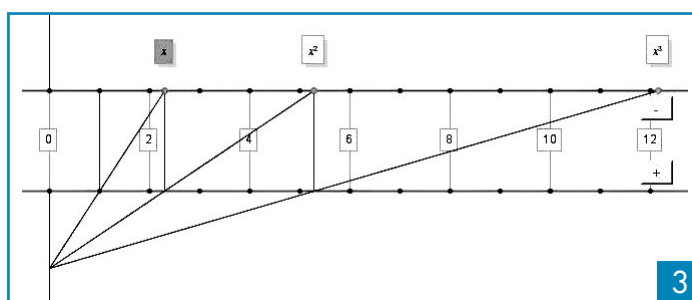
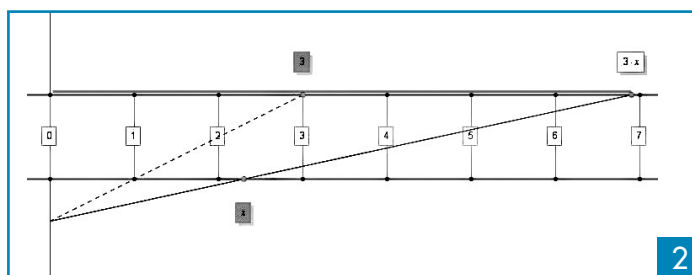
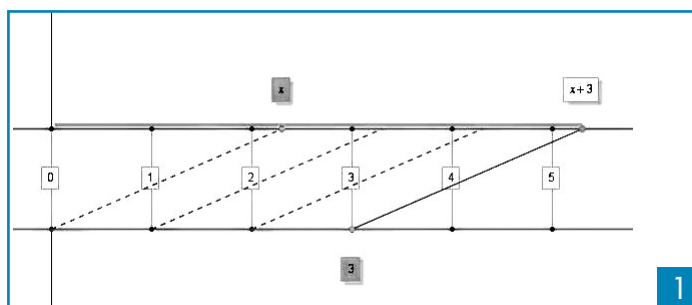
Come si può osservare, ciascun modello geometrico esprime la relazione tra due espressioni e il risultato dell'operazione tra di esse in termini di relazione geometrica tra le distanze dall'origine dei punti corrispondenti alle due espressioni e al risultato.

In questo modo, l'operazione si riflette in modo iconico nella costruzione geometrica del punto associato al risultato dell'espressione.

Questo legame iconico può essere sfruttato per attribuire significato all'espressione algebrica, per esempio per assegnare significato alle espressioni $x+3$, $3 \cdot x$, x^3 .

I modelli geometrici permettono di comprendere cosa differenzia le tre espressioni dal punto di vista costruttivo e in questo modo permettono di legare a rappresentazioni che sono controllabili percettivamente le regole espresse dalla forma delle espressioni, determinando una condizione per l'attribuzione di significato che è diversa da quella puramente simbolica della pratica scolastica corrente.

Osserviamo inoltre che sulla retta algebrica ogni espressione costruita è contenuta in un post-it associato al punto. Questo post-it contiene tutte le espressioni che indicano come risultato il valore del punto ad esso associato. Osserviamo che se due espressioni sono contenute nello stesso post-it ciò è in-



dice della loro uguaglianza per quel determinato valore.

b) In questo ambiente è possibile trascinare i punti mobili corrispondenti a variabili algebriche e osservare il movimento corrispondente dei punti delle espressioni contenenti tali variabili. Questa funzione offre un'importante opportunità di mediazione didattica in quanto consente di reificare dinamicamente le quantità numeriche che sono il risultato della sequenza di calcoli indicato, in modo indeterminato, da un'espressione letterale. Con questa funzione la tecnologia digitale è sfruttata per "svelare" ciò che un'espressione letterale indica in modo indeterminato. Questa possibilità è cruciale per lo sviluppo di un'algebra delle quantità e consente di mediare numerosi sviluppi concettuali.

Per esempio il trascinamento può essere sfruttato per esplorare l'insieme numerico rappresentato da un'espressione o per riconoscere la proprietà dell'insieme numerico che si riflette iconicamente nella forma dell'espressione (si pensi, per esempio, al supporto fornito per riconoscere le proprietà incorporate nella forma di $2 \cdot x+1$ o di $x+(x+1)$).

Inoltre può essere sfruttato per portare sot-

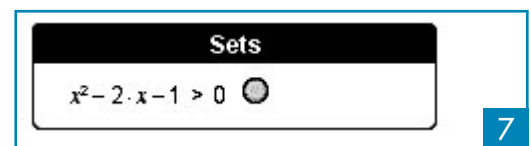
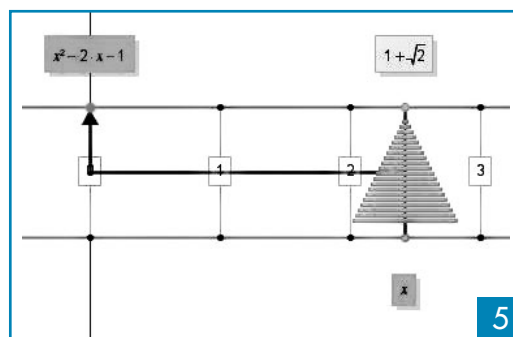
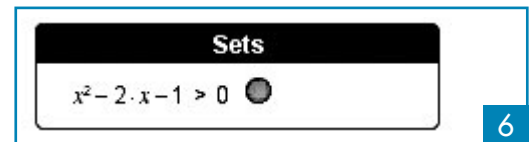
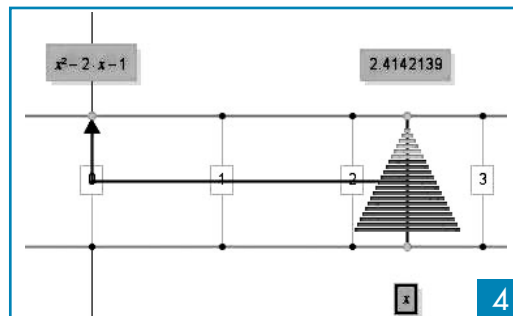
to il controllo della percezione ciò che caratterizza l'uguaglianza condizionata tra due espressioni e ciò che invece caratterizza la loro equivalenza. Osserviamo che due espressioni equivalenti rappresentate sulla retta algebrica sono contenute nello stesso post-it sotto ogni trascinamento della variabile da cui entrambe dipendono. L'uguaglianza condizionata tra due espressioni è invece caratterizzata dal fatto che trascinando la variabile da cui entrambe dipendono esse indicano lo stesso valore numerico, cioè sono contenute nello stesso post-it, solo per specifici valori di tale variabile. Questo può costituire un modo per costruire il significato di soluzione di equazione portando sotto il controllo della percezione il fenomeno dell'uguaglianza condizionata.

c) Uno specifico comando della retta algebrica consente di trovare le radici di un polinomio a coefficienti interi trascinando il punto mobile corrispondente alla variabile da cui il polinomio dipende in prossimità di un valore in cui il polinomio tende ad essere nullo. Le figure 4 e 5 illustrano questo processo nel caso del polinomio x^2-2x-1 . L'animazione grafica che si sviluppa (trian-

L'idea soggiacente a questa funzione è quella di sfruttare la tecnologia per focalizzare l'attenzione sul significato di radice di polinomio (valore della variabile per cui il polinomio si annulla), delegando al calcolatore il processo di calcolo per la determinazione del suo valore numerico. Osserviamo infine che le radici di un polinomio trovate con questa funzione possono essere usate successivamente nell'ambiente del manipolatore simbolico per fattorizzarlo.

d) L'equazione, la disequazione o il sistema di (dis) equazioni di cui si vuole esplorare e definire l'insieme di verità viene visualizzata in una apposita finestra dell'ambiente (finestra Sets) e associata ad un pallino che assumerà colore rosso o verde in ragione rispettivamente della sua falsità o verità a seconda del valore assunto dalla variabile sulla retta algebrica durante il trascinamento con il mouse. Di seguito riportiamo due figure relative alla disequazione $x^2-2x-1 > 0$. La prima figura (figura 6) è corrispondente ad uno stato in cui la variabile x è posizionata sulla retta algebrica in un punto compreso tra 1 e 2 determinando la falsità della proposizione segnalata dal pallino rosso. La seconda figura (figura 7) è corrispondente ad uno stato in cui la variabile x è posizionata sulla retta algebrica in un punto compreso tra 4 e 5 determinando la verità della proposizione segnalata dal pallino verde.

Il trascinamento della variabile è quindi uno



golo rosso della figura 4 vs triangolo verde della figura 5) indica il processo di calcolo automatico eseguito dal sistema per determinare il valore numerico della radice e quando possibile, anche quello simbolico una volta che l'utente, con il trascinamento del punto mobile x , ha approssimato l'annullamento del polinomio.

strumento per esplorare il valore di verità della proposizione che è condizionato dal valore numerico assunto dalla variabile in essa contenuta.

Inoltre, è possibile definire l'insieme di verità di una proposizione mediante l'uso di un apposito editore grafico. Consideriamo ancora l'esempio precedente. Dopo che sono state trovate e rappresentate sulla retta algebrica le radici del polinomio associato alla disequazione, uno specifico editore grafico consente di selezionare con il mouse gli intervalli numerici del suo insieme verità (nella figura 8 i due intervalli aperti sulla retta algebrica a destra e a sinistra delle due

radici trovate). Il sistema provvede a tradurre dinamicamente gli intervalli selezionati con il metodo grafico in linguaggio formale della finestra Sets.

Osserviamo che nella fase di definizione dell'insieme verità la proposizione nella finestra Sets non è caratterizzata dal pallino colorato.

Terminata la definizione dell'insieme verità, è possibile validarlo verificando la concordanza di colore tra il pallino che testimonia la verità o falsità della proposizione e quello che affianca l'insieme verità costruito e che indica se il valore numerico assunto della variabile sulla retta algebrica in un determinato momento appartiene o meno a tale insieme (figura 9).

Osserviamo infine che la possibilità di esplorare e definire l'insieme verità di una proposizione è strettamente connessa alla possibilità di poter verificare visivamente sulla retta algebrica l'avverarsi o meno della condizione definita nella proposizione mediante i segni di confronto. Tutto ciò può essere sfruttato sul piano cognitivo e sul piano epistemico nello sviluppo della nozione di insieme verità.

IL MANIPOLATORE SIMBOLICO DI ALNUSET: CARATTERISTICHE FUNZIONALI E IDEE PROGETTUALI SOGGIACENTI

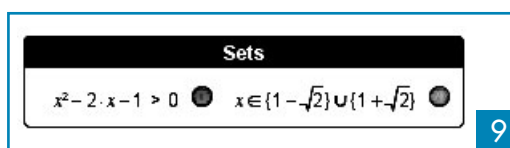
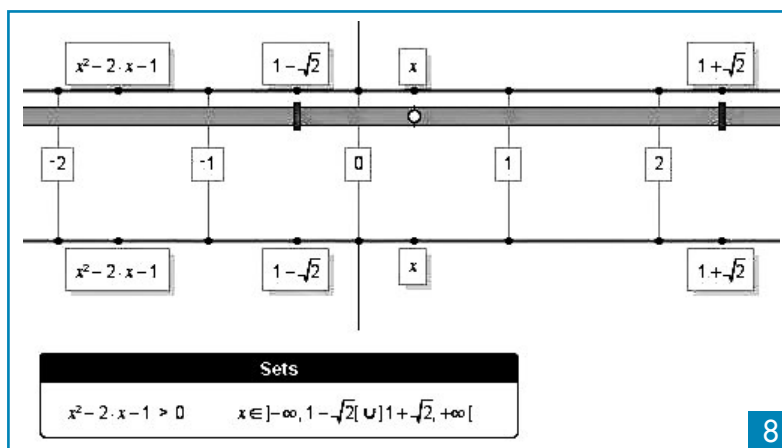
L'ambiente di manipolazione simbolica di Alnuset è stato progettato per innovare profondamente l'algebra delle operazioni formali attuata nel contesto scolastico e per integrarla con un'algebra delle quantità mediata dall'uso della retta algebrica.

La sua realizzazione è stata guidata da una idea progettuale volta a dotare questo ambiente di caratteristiche in grado di mediare il superamento dei problemi cognitivi e semiotici che risultano coinvolti nella manipolazione simbolica, discussi in una sezione precedente.

L'idea progettuale consiste nello sfruttare le tecniche di *pattern matching* dell'informatica usate nell'implementazione di tutti i manipolatori simbolici secondo una prospettiva diversa da quella che caratterizza i CAS (Computer Algebra System).

In informatica il *pattern matching* è l'atto di controllare la presenza di specifici costituenti (pattern) in un data forma (per esempio in un'espressione algebrica).

Nei CAS le tecniche di *pattern matching* solitamente sono usate secondo una prospettiva pragmatica, cioè secondo una prospettiva orientata a produrre un risultato di tra-



sformazione simbolica anche molto complesso con efficacia, efficienza, economia di tempo e di pensiero. Come conseguenza, la tecnica di trasformazione applicata è spesso oscura, soprattutto per l'utente poco esperto (vedi Chiappini, in questo numero).

Nel Manipolatore Simbolico di Alnuset la tecnica di *pattern matching* è invece usata per risolvere, da una parte, problemi di tipo cognitivo coinvolti nella manipolazione simbolica e, dall'altra, problemi di tipo epistemico coinvolti nella comprensione dei fenomeni algebrici che la caratterizzano. Questa idea progettuale si è concretizzata con la realizzazione di una interfaccia volta a favorire la comprensione e il controllo delle regole di trasformazione che possono essere applicate su ogni parte significativa dell'espressione o proposizione e degli effetti che tale applicazione produce.

L'interfaccia dell'ambiente è stata suddivisa in due spazi distinti: lo spazio in cui sono riportati i comandi di manipolazione simbolica disponibili per le trasformazioni, lo spazio in cui realizzare la trasformazione simbolica. Specifiche scelte di progettazione sono state compiute per rendere disponibile un linguaggio di interfaccia in grado di fornire vari supporti sul piano cognitivo.

Un primo supporto riguarda la possibilità per gli studenti di esplorare con il mouse la struttura gerarchica che caratterizza l'espressione o la proposizione che si vuole manipolare.

Osserviamo che muovendo il mouse sugli elementi che caratterizzano un'espressione (operatori, numeri, lettere, parentesi...) il sistema dinamicamente visualizza la parte

Il mouse punta all'operatore "-" di $2x-1$

Il mouse punta alla parentesi della parte di espressione selezionata

Il mouse punta all'operatore "+" di $(2x-1)^2 + (x+1)$

Il mouse punta alla linea di frazione dell'espressione

10

significante dell'espressione determinata da tale puntamento (figura 10).

Con questo supporto è possibile esplorare tutte le parti significanti di un'espressione ai vari livelli della sua struttura gerarchica.

Una volta selezionata la parte di espressione su cui eseguire una trasformazione il sistema, mediante una tecnica di pattern matching, fornisce come feedback l'attivazione dei comandi che possono essere applicati sulla parte di espressione selezionata. Si tratta di un supporto notevole sul piano cognitivo, che può essere sfruttato per esplorare e comprendere il legame tra regola di trasformazione, forma su cui può essere applicata e effetto prodotto attraverso la sua applicazione.

Osserviamo che questo manipolatore rende disponibile attraverso l'interfaccia un insieme strutturato di regole di base per il pattern matching usabile dalla scuola media sino alla fine della scuola superiore, per manipolare simbolicamente espressioni numeriche e letterali di differente complessità (dalle semplici espressioni numeriche alle espressioni razionali e irrazionali) e per risolvere (dis)equazioni e sistemi di (dis)equazioni via via più complessi. Si tratta di regole che corrispondono alle proprietà di base delle operazioni di addizione, moltiplicazione e potenza, alle proprietà di uguaglianze e disuguaglianze tra espressioni algebriche, a operazioni di base tra proposizioni e tra insiemi. A queste regole di base se ne aggiungono due simili a quelle presenti nei CAS che consentono, per esempio, di trovare il risultato di un'espressioni numerica o di effettuare un calcolo polinomiale. Infine, tre regole consentono di importare nel manipolatore risultati realizzati nell'ambiente Retta Algebrica e più precisamente di importare:

- le radici trovate di un polinomio per fattorizzarlo;

- l'insieme verità di una proposizione;
- il valore assunto da una variabile sulla retta algebrica per sostituirlo nell'espressione su cui si opera.

Si tratta di un insieme di regole di base che consente di realizzare qualsiasi manipolazione algebrica prevista dal curriculum di algebra della scuola media e della scuola superiore.

Il sistema inoltre consente allo studente di creare nuove regole di trasformazione (regole utente), dimostrandole usando i comandi di base disponibili con l'interfaccia o altre regole utente precedentemente dimostrate.

Le regole utente possono essere quindi salvate, importate e usate in successive manipolazioni algebriche.

Come messo in evidenza anche da altre ricerche [Cerulli e Mariotti, 2003] la funzione di creare nuove regole utente può avere una grande importanza sul piano epistemico, in quanto può consentire lo sviluppo di un approccio teorico all'algebra insegnata.

Per mostrare più concretamente come Almuset permette di integrare l'algebra delle operazioni formali e con un'algebra delle quantità, consideriamo un esempio tratto da una sperimentazione che stiamo realizzando.

Attività per gli studenti: *Considera la seguente uguaglianza: $x^2+2=2x+3$.*

- 1) Usa il manipolatore per trasformare questa uguaglianza tra due polinomi in una uguaglianza tra un polinomio e 0.
- 2) Usa la retta algebrica per trovare le radici del polinomio uguagliato a 0.
- 3) Usa la retta algebrica per giustificare la relazione tra le due uguaglianze rappresentando sulla retta algebrica i tre polinomi in esse coinvolte.
- 4) Usa la retta algebrica per trovare l'insieme numerico per cui le due uguaglianze sono vere.
- 5) Usa infine il manipolatore simbolico per risolvere con metodi diversi l'equazione $x^2+2=2x+3$.

1. Riportiamo due possibili soluzioni relative alla prima richiesta del compito che sfruttano differenti possibilità offerte dai comandi del manipolatore.

Entrambe le trasformazioni usano la stessa proprietà delle uguaglianze (se due espressioni sono uguali, la loro differenza è 0) ma realizzano il calcolo polinomiale in modo diverso. Nella prima trasformazione (figura 11) il calcolo avviene principalmente mediante regole che fanno riferimento alle proprietà di base delle operazioni, nella seconda (figura 12) tramite un comando tipico dei CAS (expand) che esegue automaticamente il calcolo.

- La ricerca di radici per il polinomio $x^2 - 2x - 1$ è già stata presentata in precedenza e ad essa facciamo riferimento per comprendere la natura dei processi coinvolti.
- La figura 13 illustra l'uso della retta algebrica relativa alla richiesta di giustificare la relazione tra le due uguaglianze.

Lo spostamento dinamico del punto mobile x sulla retta permette di evidenziare che le due uguaglianze sono equivalenti, cioè che esse risultano verificate per gli stessi valori numerici corrispondenti alle radici del polinomio $x^2 - 2x - 1$ trovate in precedenza. Questa esplorazione può essere sfruttata per favorire la comprensione che quando si manipola un'equazione si conserva l'equivalenza, cioè si conserva il valore di verità delle proposizioni per gli stessi valori numerici della variabile coinvolta.

- Le figure 14, 15 e 16 illustrano il passaggio dall'esplorazione dei valori numerici che condizionano il valore di verità delle due proposizioni (problema precedente) alla costruzione del loro insieme verità (figura 14) e alla validazione degli insiemi verità costruiti (figure 15 e 16). L'aspetto rilevante di queste ultime due figure riguarda la concordanza di colore non più fra una proposizione e il suo insieme verità (come evidenziato nella sezione precedente al punto d) ma fra due proposizioni e i rispettivi insiemi verità. La validazione di tale concordanza tramite il trascinamento della variabile indica che le due proposizioni sono equivalenti e che il loro valore di verità è dipendente dallo stesso insieme numerico.

- Per quanto riguarda l'ultima richiesta del compito le figure 17, 18 e 19 riportano tre differenti soluzioni possibili con i comandi del manipolatore simbolico. La prima soluzione (figura 17) è stata realizzata sfruttando un comando che consente di importare nel manipolatore simbolico l'insieme verità di una proposizione definito in precedenza nell'ambiente della retta algebrica. Si tratta pertanto di una soluzione dell'equazione che si appoggia completamente sui metodi di algebra quantitativa della retta algebrica. Osserviamo che la figura 17 riporta tutti i passaggi della soluzione. La seconda soluzione (figura 18) è stata realizzata sfruttando un comando dell'interfaccia che consente di fattorizzare un polinomio in base alle radici di tale polinomio individuate in precedenza sulla retta algebrica. La fattorizzazione del polinomio viene quindi realizzata sfrut-

$$x^2 + 2 = 2 \cdot x + 3$$

$$x^2 + 2 - (2 \cdot x + 3) = 0$$

$$x^2 + 2 + (-2 \cdot x + (-3)) = 0$$

$$x^2 + 2 + (-1) \cdot (2 \cdot x + 3) = 0$$

$$x^2 + 2 + (-1) \cdot 2 \cdot x + (-1) \cdot 3 = 0$$

$$x^2 + (-1) \cdot 2 \cdot x + 2 + (-1) \cdot 3 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$$

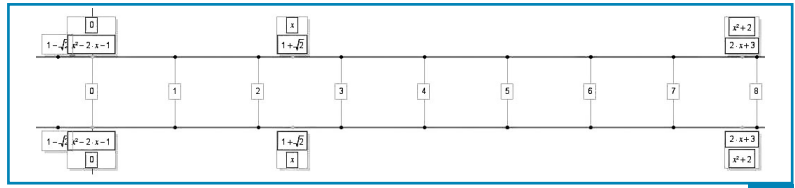
11

$$x^2 + 2 = 2 \cdot x + 3$$

$$x^2 + 2 - (2 \cdot x + 3) = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$$

12



13

Sets	
$x^2 + 2 = 2 \cdot x + 3$	$x \in \{1 - \sqrt{2}\} \cup \{1 + \sqrt{2}\}$
$x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$	$x \in \{1 - \sqrt{2}\} \cup \{1 + \sqrt{2}\}$

14

Sets	
$x^2 + 2 = 2 \cdot x + 3$	<input type="radio"/> $x \in \{1 - \sqrt{2}\} \cup \{1 + \sqrt{2}\}$
$x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$	<input type="radio"/> $x \in \{1 - \sqrt{2}\} \cup \{1 + \sqrt{2}\}$

15

Sets	
$x^2 + 2 = 2 \cdot x + 3$	<input checked="" type="radio"/> $x \in \{1 - \sqrt{2}\} \cup \{1 + \sqrt{2}\}$
$x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$	<input checked="" type="radio"/> $x \in \{1 - \sqrt{2}\} \cup \{1 + \sqrt{2}\}$

16

$$x^2 + 2 = 2 \cdot x + 3$$

$$x^2 + 2 - (2 \cdot x + 3) = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$$

$$x \in \{1 - \sqrt{2}\} \cup \{1 + \sqrt{2}\}$$

17

$$x^2 + 2 = 2 \cdot x + 3$$

$$x^2 + 2 - (2 \cdot x + 3) = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$$

$$(x - (1 - \sqrt{2})) \cdot (x - (1 + \sqrt{2})) = 0$$

$$\begin{cases} x - (1 - \sqrt{2}) = 0 \\ 2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - (1 + \sqrt{2}) = 0 \\ 2 \geq 0 \end{cases} = 0$$

$$\begin{cases} x - (1 - \sqrt{2}) = 0 \\ True \end{cases} \vee \begin{cases} x - (1 + \sqrt{2}) = 0 \\ 2 \geq 0 \end{cases} = 0$$

$$\begin{cases} x - (1 - \sqrt{2}) = 0 \\ True \end{cases} \vee \begin{cases} x - (1 + \sqrt{2}) = 0 \\ True \end{cases} = 0$$

$$\begin{cases} x = (1 - \sqrt{2}) \\ True \end{cases} \vee \begin{cases} x = (1 + \sqrt{2}) \\ True \end{cases} = 0$$

$$x = (1 - \sqrt{2}) \vee x = (1 + \sqrt{2})$$

$$x = (1 - \sqrt{2}) \vee x = (1 + \sqrt{2})$$

$$x \in \{(1 - \sqrt{2})\} \vee x \in \{(1 + \sqrt{2})\}$$

$$x \in \{(1 - \sqrt{2})\} \cup \{(1 + \sqrt{2})\}$$

18

$x^2+2=2 \cdot x+3$
$x^2+2-(2 \cdot x+3)=0$
.....
$x^2+2 \cdot x+1=0$
.....
$(-2)^2-4 \cdot 1=0 \vee (-2)^2-4 \cdot 1 > 0 \vee (-2)^2-4 \cdot 1 > 0$
$x = \frac{2}{2} \quad \left \quad x = \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2} \quad \left \quad x = \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2}$
.....
$\text{False} \vee \text{True} \vee \text{True}$
$x = \frac{2}{2} \quad \left \quad x = \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2} \quad \left \quad x = \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2}$
.....
$\text{False} \vee x = \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2} \vee x = \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2}$
$\text{False} \vee x \in \left\{ \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2} \right\} \vee x = \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2}$
$\text{False} \vee x \in \left\{ \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2} \right\} \vee x \in \left\{ \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1}}{2} \right\}$
.....
$\text{False} \vee x \in \{1-\sqrt{2}\} \vee x \in \{1+\sqrt{2}\}$
$x \in \{1-\sqrt{2}\} \vee x \in \{1+\sqrt{2}\}$

19

User Rules
$x^2+b \cdot x+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2-4 \cdot c=0 \\ x = \frac{-b}{2} \end{array} \vee \left[\begin{array}{l} b^2-4 \cdot c > 0 \\ x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4 \cdot c}}{2} \end{array} \vee \left[\begin{array}{l} b^2-4 \cdot c > 0 \\ x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4 \cdot c}}{2} \end{array} \right. \right.$

20

tando un metodo quantitativo disponibile con la retta algebrica; la successiva soluzione dell'equazione si sviluppa però in modo formale secondo un'algebra delle operazioni, per mezzo dei comandi di base dell'interfaccia.

Si tratta pertanto di una soluzione mista che integra algebra delle operazioni formali e algebra delle quantità. Osserviamo che la figura 18 riporta tutti i passaggi della soluzione.

La terza soluzione (figura 19) è stata sviluppata attraverso un approccio esclusivamente formale, sfruttando la regola utente sotto riportata e dimostrata in precedenza dall'utente (figura 20). Osserviamo che la figura 19 riporta alcuni dei passaggi più significativi della soluzione.

Queste tre differenti soluzioni sono espressioni di differenti livelli di mediazione sul piano epistemico offerti da Almuset.

È compito della ricerca educativa elaborare specifici percorsi didattici in grado di sfruttare tutte le diverse possibilità di mediazione didattica offerte dal sistema nel suo complesso, verificando i miglioramenti che esse determinano nel processo di insegnamento apprendimento.

Questo è ciò di cui ci stiamo occupando in questo momento e di cui intendiamo dare conto in un prossimo articolo.

riferimenti bibliografici

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (2001), A model for analyzing algebraic process of thinking, in Sutherland R., Rojano T., Bell A. (eds), *Perspectives on school algebra*, Kluwer Academic Publisher, pp. 61-82.

Cerulli M., Mariotti M.A. (2003), *Building theories: working in a mi-*

crowld and writing the mathematical notebook, in Pateman N.A., Dougherty B.J., Zilliox. (eds), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, Vol. II, CRDG, College of Education, University of Hawaii, Honolulu, HI, USA, pp. 181-188.

Harper E. (1987), *Ghosts of*

Diophantus, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18.

Peirce C. S. (2003), *Opere*, (a cura di) Bonfantini M.A., Bompiani.

Sfard A., Linchevski L. (1992), *Equations and inequalities: processes without objects?*, in *Proc. of PMEXVI*, New Hampshire, USA.