Tecnologia e innovazione nella didattica della matematica

Rosa Maria Bottino
Giampaolo Chiappini
CNR - Istituto di Matematica Applicata, Genova

Introduzione

Ogni processo educativo di tipo istituzionale richiede di stabilire, nei vari ambiti disciplinari, i contenuti che dovranno essere oggetto di insegnamento ai vari livelli scolari. Il passaggio da un contenuto di sapere determinato, nella sua forma decontestualizzata e "ufficiale", a una versione didattica di questo è chiamato da Chevallard *trasposizione didattica* [Chevallard, 1985]. Lo studio scientifico del processo di trasposizione didattica presuppone che si considerino tutti i problemi connessi ai processi che portano un *oggetto di sapere* ad essere identificato come *un oggetto da insegnare* per diventare infine nella pratica didattica un *oggetto di insegnamento*.

La teoria della trasposizione didattica di Chevallard mette innanzitutto in evidenza come avviene la legittimazione degli oggetti del sapere che viene insegnato.

Non è l'insegnante che trasforma di sua iniziativa un sapere "ufficiale" in oggetto da insegnare. Questa trasformazione è realizzata da istituzioni che non hanno una visibilità apparente.

Il sistema di insegnamento è un sistema aperto che ha delle relazioni con l'ambiente sociale (genitori, ricercatori, istituzioni varie..); il suo funzionamento deve essere compatibile con questo ambiente.

Chevallard chiama noosfera l'insieme dei luoghi e delle istanze in cui avvengono gli scambi fra il sistema di insegnamento e il suo ambiente.

La noosfera funziona come una quinta del sistema di insegnamento nella quale un sapere diventa *oggetto da insegnare*, cioè subisce una trasformazione per renderlo scolarizzabile. La trasposizione didattica infatti non è una semplice elementarizzazione della conoscenza "ufficiale". Nel processo di trasposizione al sistema scolastico l'oggetto di sapere deve essere integrato con vecchi oggetti di insegnamento e deve essere sottoposto ai vincoli che sono propri del sistema didattico (tempi limitati, strumenti disponibili, …).

Il processo di trasposizione didattica porta quindi ad una modifica della conoscenza per renderla compatibile con il sistema didattico. Nel momento in cui la conoscenza così trasformata entra nella classe e *diventa oggetto di insegnamento* essa subisce una nuova trasformazione che dipende dalle concezioni che gli insegnanti hanno del suo insegnamento in rapporto alle specifiche necessità della classe in cui operano. La contestualizzazione nell'ambito di un'attività di classe fa si che la conoscenza si arricchisca di nuovi significati che dipendono dalle connessioni che si stabiliscono tra la nuova e le vecchie conoscenze nell'ambito dell'attività, dalle caratteristiche del contesto di apprendimento/insegnamento che include anche il mondo esperienziale dei soggetti coinvolti nell'attività, dalle caratteristiche dei linguaggi e degli strumenti utilizzati nell'attività ciascuno dei quali permette di presentare l'oggetto da insegnare sotto una certa interpretazione.

Negli ultimi anni anche il calcolatore si è dimostrato un agente molto importante del processo di trasposizione didattica in molti campi del sapere e , in particolare, in campo matematico.

In questo campo disciplinare il ruolo del calcolatore come agente del processo di trasposizione didattica emerge su due piani.

Il primo piano riguarda il ruolo giocato dal calcolatore nel contribuire a determinare il cambiamento di contenuti all'interno del

curriculum di matematica.
Un esempio paradigmatico è costituito dall'inserimento di elementi di informatica all'interno dei curricula di matematica a vari livelli scolari. Negli ultimi 10-15 anni l'introduzione di metodi e tecnologie dell'informazione nel sistema didattico ha interessato i sistemi di insegnamento di tutto il mondo sotto la spinta di una pressione sociale ed economica come mai si era registrata in precedenza.
In Italia l'introduzione di elementi di programmazione e di alcuni elementi di base di informatica, nel curriculum di matematica è stato affrontato, ai vari livelli scolastici, in modo differente.
Nelle varie sperimentazioni condotte (progetto IRIS, Piano Nazionale Informatica, sperimentazioni locali…) possiamo riconoscere una motivazione di fondo comune. L'integrazione di contenuti di informatica nel curriculum di matematica è stata realizzata per consentire da un lato la riflessione su alcuni concetti chiave quale quello di variabile, di linguaggio formale, di algoritmo, comuni, pur con accezioni diverse, ad entrambe le discipline (matematica e informatica), e dall'altro, per permettere lo sviluppo di argomenti matematici importanti e di solito trascurati nell'usuale curriculum di matematica, per esempio, il calcolo approssimato, l'analisi operativa di algoritmi per la soluzione approssimata di equazioni, per il calcolo di aree, ecc.
In questo quadro la trasposizione didattica si caratterizza per il fatto che l'identificazione dei nuovi contenuti da apprendere (per esempio, lo sviluppo della capacità di usare un linguaggio di programmazione o un particolare sistema di sviluppo) è stata realizzata con il fine di permettere una loro integrazione con "vecchi" contenuti di tipo matematico. Semplificando molto possiamo dire che l'identificazione dei nuovi contenuti da apprendere è stata motivata dall'obiettivo non di insegnare, per esempio, un linguaggio di programmazione ma di approfondire riflessioni di tipo matematico attraverso l'interazione con tale linguaggio.
I vincoli posti dall'hardware, dai linguaggi e dai sistemi di sviluppo disponibili, dai costi, hanno inciso in modo determinante sulle scelte programmatiche compiute ai vari livelli scolari nel processo di trasposizione didattica.
Il calcolatore ha contribuito a cambiare i contenuti del curriculum di matematica anche su un secondo piano che è connesso con lo sviluppo di software specifico per lo sviluppo di conoscenze in campo matematico. È questo punto di vista che verrà sviluppato in questo articolo.
In questi anni sono stati realizzati vari sistemi per l'apprendimento della matematica.
Molti di questi sistemi in realtà non hanno portato ad una modifica sostanziale dei contenuti del curriculum e neppure ad un cambio di metodologia nel modo di apprendere e di insegnare. Molti programmi drill and practice, molti tutoriali e programmi CAI ma anche, più recentemente, alcuni sistemi ipermediali, costituiscono esempi di tecnologie diverse che si basano su un modello di apprendimento visto come trasmissione del sapere, dove il sapere è quello istituzionalizzato all'interno dei curricula tradizionali. L'uso della tecnologia dell'informazione cambia i mezzi e i modi attraverso i quali si trasmette il sapere ma le caratteristiche di questo sapere e la pedagogia soggiacente al suo apprendimento non vengono sostanzialmente modificate dai nuovi mezzi utilizzati.
Altri sistemi, ed in particolare quelli basati su micromondi, hanno invece portato a cambiamenti sostanziali sia rispetto alla natura del sapere che viene insegnato e appreso sia rispetto ai processi coinvolti nel suo apprendimento.
Nel seguito, attraverso due esempi, si metterà in evidenza la natura dei cambiamenti che possono emergere nell'apprendimento di contenuti matematici attraverso la mediazione del calcolatore. I due esempi si riferiscono uno all'apprendimento della geometria, l'altro a quello dell'aritmetica.

Apprendimento della geometria mediato dal calcolatore

Prendiamo qui in considerazione i cambiamenti introdotti nell'insegnamento e nell'apprendimento della geometria dall'utilizzo del sistema Cabri-Géomètre.
Le riflessioni condotte in questa sezione fanno riferimento alle elaborazioni prodotte da ricercatori del gruppo che ha realizzato e sperimentato Cabri [Laborde J.M., Strasser R.,1990] ed in particolare agli studi realizzati da Colette Laborde [Laborde C., 1993].
La geometria è una teoria matematica per modellare lo spazio fisico ma è anche una teoria autonoma con propri assiomi, oggetti, regole e problemi. Questa dualità della co-

noscenza geometrica ha influenzato i curricula che hanno oscillato tra una impostazione fortemente assiomatica e una più descrittiva di figure piane e solidi. Questa diversità di impostazione didattica è dipendente dal ruolo assegnato alle figure all'interno di questo dominio di sapere. Le figure geometriche hanno infatti una doppia natura; esse sono da una parte entità materiali che possono essere disegnate su un supporto fisico (e quindi soggette ad un controllo di tipo percettivo) e dall'altra sono oggetti di una teoria (e quindi risultanti da una astrazione e controllabili solo su un piano concettuale). Dare conto di questo doppio ruolo, comporta distinguere tra disegno e figure.

Il disegno si riferisce all'entità materiale mentre le figure si riferiscono ad oggetti teorici descritti da testi che li definiscono. Questa distinzione sul piano epistemologico ha importanti ripercussioni anche sul terreno cognitivo. È importante osservare che quando si affronta un problema geometrico solo alcune caratteristiche del disegno sono rilevanti per il problema da risolvere.

Nella soluzione di un problema geometrico la percezione coinvolta nell'operare sulla figura deve essere controllata sul piano razionale facendo riferimento ai concetti della teoria. L'aspetto visuale del disegno materiale può essere di ostacolo all'analisi teorica della corrispondente figura poiché l'aspetto percettivo può entrare in conflitto con l'interpretazione del disegno che deve supportare il ragionamento e condurre alla soluzione del problema.

Sul terreno didattico si è sempre avvertita l'esigenza di strumenti in grado di favorire lo sviluppo della capacità di riconoscere la stessa figura sotto varie descrizioni, superando le difficoltà dovute al fatto che gli alunni lavorano sul disegno invece di operare sulla figura o sulla descrizione delle figure.

Il computer è stato utilizzato per progettare programmi in grado di reificare la molteplicità dei disegni che possono essere associati alla stessa figura. Cabri-Géomètre è uno di questi programmi. Altri di questo tipo sono, per esempio, Geometer Sketchpad [Key Curriculum Press] e Geometric Supposer [Yerushalmy and Chazan, 1990].

Una prima caratteristica di questo tipo di sistemi è l'uso esplicito di una descrizione della figura nella comunicazione con il computer, anche se questa esplicitazione, a seconda dei programmi, viene realizzata con modalità e linguaggi diversi.

Una seconda caratteristica comune a tutti questi programmi è che essi consentono di poter visualizzare una molteplicità di disegni associati alla stessa figura. Ciò appare particolarmente utile per lo sviluppo della capacità di realizzare e validare congetture in campo geometrico perché consente di cogliere percettivamente le proprietà che si conservano quando gli elementi variabili della figura sono modificati. In figura 1 è riportato un esempio d'uso del sistema Cabrì.

Queste due caratteristiche modificano in modo rilevante il modo in cui la geometria può essere insegnata e appresa perché consentono di realizzare cambiamenti significativi sui contenuti geometrici che possono essere insegnati con la mediazione di questi sistemi rispetto a quelli contemplati nei curricula tradizionali o consolidati nella pratica didattica corrente. Questi cambiamenti possono realizzarsi in quanto la mediazione di questi sistemi rende possibile nuovi modi di dare significato ai concetti geometrici oggetto di apprendimento, struttura nuove possibilità di interazione tra conoscenza e alunno e cambia il contratto didattico che si realizza nella classe tra alunno e insegnante in relazione al sapere perché modifica i loro ruoli e le loro reciproche interazioni nell'ambito dell'attività mediata dal sistema. Come conseguenza *l'oggetto di insegnamento* della geometria può risultare profondamente trasformato dal loro utilizzo.

Per un'analisi più approfondita di esempi e di itinerari didattici che possono essere realizzati attraverso l'uso del sistema Cabrì-Géomètre si consiglia di consultare i seguenti due siti, uno francese *(http://www-leibniz.imag.fr/cabri-renvoi.html)* coordinato dall'equipe che ha sviluppato il sistema e l'altro italiano coordinato dall'IRRSAE Emilia Romagna *(http://arci01.bo.cnr.it/cabri/)*.

L'apprendimento dell'aritmetica mediato da computer

Le conoscenze matematiche che risultano coinvolte nell'apprendimento dell'aritmetica a livello di scuola primaria riguardano lo sviluppo del concetto di numero e la capacità di usare procedure, simboli aritmetici e strategie per risolvere problemi di struttura additiva e moltiplicativa.

Nell'insegnamento il numero è normalmente presentato come quantità di cose che devono

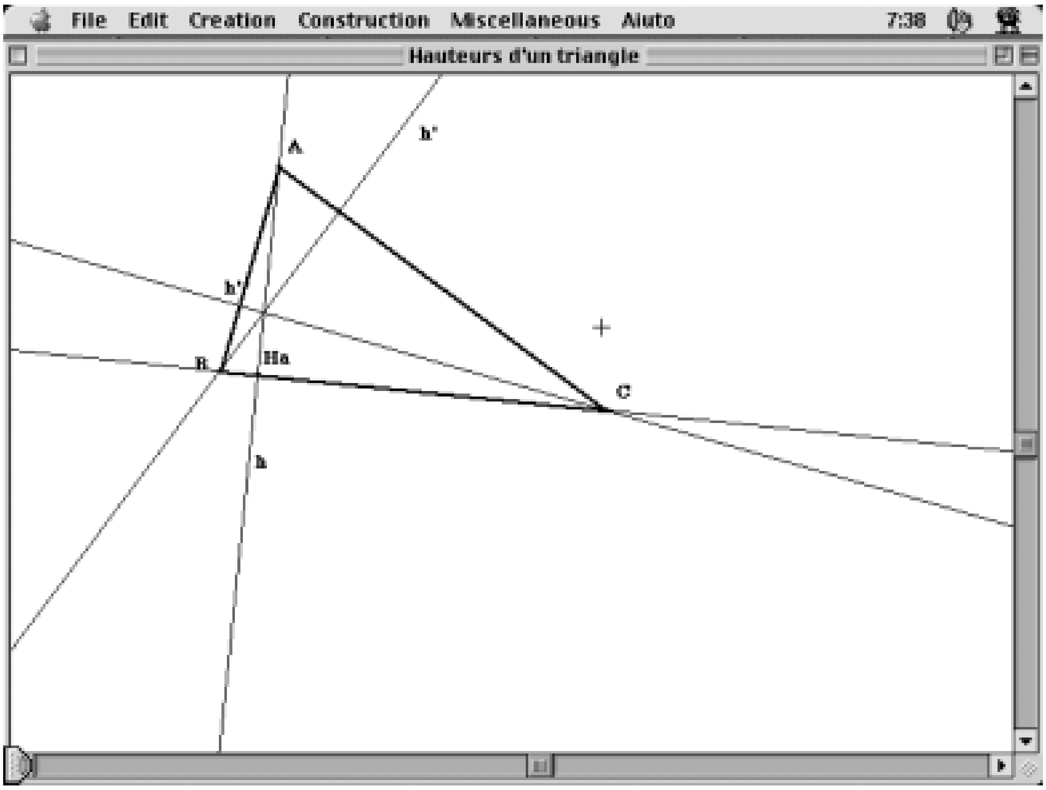

Figura 1
Uso di Cabrì per costruire il punto di incontro delle altezze di un triangolo. Dragando con il mouse i vertici del triangolo si può osservare percettivamente che si conserva la proprietà dell'incontro delle altezze in un punto. Punto che, a seconda delle caratteristiche del disegno attualizzato potrà essere interno o esterno al triangolo.

essere contate, presenti nel mondo quotidiano dell'esperienza del bambino.
Lo stabilire una relazione empirica tra numeri e oggetti del mondo reale è sicuramente un approccio necessario e utile per l'introduzione al concetto di numero; allo stesso tempo tale approccio potrebbe, in seguito, essere un ostacolo per lo sviluppo di un concetto di numero più completo sul piano strutturale e algoritmico [Stembring H., 1997]. Questa osservazione ha anche una giustificazione sul piano storico (oltre che su quello dell'apprendimento/insegnamento) dove nel tempo è emerso un cambiamento di prospettiva nel passaggio da una visione empirica e oggettiva del concetto di numero a una funzionale e relazionale.
Sul terreno didattico risulta pertanto di cruciale importanza la necessità di creare situazioni di interazione sociale in grado di assistere gli alunni nell'affrontare il difficile passaggio da una interpretazione empirica e oggettiva del numero a una relazionale e funzionale. A tale riguardo è importante osservare che è solo in una prospettiva funzionale e relazionale del numero che uno studente è in grado di utilizzare i mezzi offerti da un sistema di numerazione per affrontare e risolvere problemi aritmetici anche complessi.
L'approccio tradizionale all'apprendimento dell'aritmetica nella scuola dell'obbligo si basa principalmente su:
- Una introduzione del numero secondo la notazione posizionale decimale basata su decifrazione e codifica, sganciata molto spesso dalle competenze numeriche che l'alunno possiede.
- Una introduzione precoce dei segni aritmetici come unico modo per esplicitare il procedimento risolutivo nella soluzione dei problemi.
- Una introduzione precoce degli algoritmi di calcolo scritto delle operazioni aritmetiche usate come strumento per giungere al risultato del problema.

Spesso il risultato di tale approccio è che si riscontra una notevole difficoltà nella risoluzione di problemi aritmetici da parte degli studenti della scuola dell'obbligo. Le difficoltà sono essenzialmente legate alla incapacità di associare un significato ai simboli aritmetici che può portare gli alunni a cercare di indovinare l'operazione da applicare alla situazione, perdendo di vista completamente il rapporto tra la situazione problematica in esame e il senso dei simboli in grado di interpretarla quantitativamente. Sono noti

i guasti profondi di una simile impostazione: incapacità di interpretare criticamente un risultato, incapacità di applicare il procedimento a situazioni diverse, non conoscenza effettiva del sistema di numerazione posizionale, incapacità di mettere in atto strategie personali adatte alla situazione specifica, ecc. Tutto ciò pone questioni didattiche rilevanti connesse con i modi e le metodologie più proficue per sviluppare, per esempio, la padronanza dei simboli aritmetici ed, in generale, dei sistemi simbolici.
Numerose ricerche hanno messo in luce che per capire la natura delle difficoltà riscontrate e, quindi, per realizzare una didattica efficace per l'apprendimento, occorre guardare alla conoscenza da insegnare integrando diversi punti di vista.
Per quanto riguarda la conoscenza aritmetica, ad esempio, un approccio di tipo storico può aiutare a capire come tale conoscenza si sia trasformata nel tempo e, di conseguenza, come ciò che attualmente costituisce l'oggetto da insegnare sia il risultato di una lunga evoluzione. Ad esempio, il sistema di numerazione posizionale decimale è il punto di arrivo di un cammino che parte dai sistemi di numerazione additivi di spunta, via trasformatisi secondo notazioni più formali, che si sono basate per molto tempo su proprietà di tipo additivo.
Anche le competenze numeriche che i bambini costruiscono fuori da una sistematizzazione scolastica sono generalmente di tipo additivo e non posizionale. Se la notazione decimale posizionale viene introdotta e appresa come puro esercizio di decifrazione e codifica si rischia di non tenere conto che nel passaggio da una concezione additiva ad una posizionale del numero emergono forti contraddizioni che l'intervento didattico dovrebbe far evolvere. La scrittura del numero "milledieci" come "100010", presente in alcuni casi ancora in prima media, mostra come questa contraddizione non sia ancora stata superata. Ma anche quando la scrittura del numero è corretta è bene tenere presente che una decifrazione corretta può coesistere anche in assenza di una competenza numerica ben strutturata oppure scollegata da essa. Ciò può emerge per esempio quando non c'è la necessità di stabilire una concordanza tra il leggere o lo scrivere un numero e l'ottenere un significato. Questa dissociazione è molto simile a quella che si registra nell'apprendimento del linguaggio scritto quando non si realizza più una corrispondenza tra l'attività di decifrazione (lettura) e quella di comprensione di un testo, come ben messo in evidenza dalla ricerca di Ferreiro e Teberosky [Ferreiro E., Teberosky A., 1985].
Anche l'uso dei segni aritmetici per esplicitare la procedura risolutiva di un problema e degli algoritmi di calcolo scritto delle operazioni per dare il risultato sono il punto di arrivo di una evoluzione sul piano storico. Ancora pochi secoli fa per realizzare la soluzione di un problema aritmetico si usava il linguaggio naturale e i mezzi offerti dal sistema di numerazione. La soluzione quindi si presentava come un discorso. Il discorso dava conto del come venivano utilizzati nella particolare situazione presa in esame i mezzi offerti dal sistema di numerazione e permetteva di mantenere un contatto molto stretto con il senso della procedura messa in atto. L'introduzione nella soluzione dei segni aritmetici risponde ad esigenze di economia di pensiero e di sintesi nella rappresentazione. Un loro uso precoce e non ben mediato didatticamente può però provocare negli alunni con più difficoltà una perdita del senso della strategia.
Una didattica attenta alla costruzione del senso dei simboli dovrebbe prevedere di esporre l'alunno all'uso dei segni aritmetici dopo che egli è in grado di realizzare strategie risolutive per mezzo di altri sistemi di rappresentazione e di mediazione semiotica, più efficaci a favorire forme di controllo del senso della strategia messa in atto in relazione alla situazione di enunciazione del problema.
I diversi apporti brevemente citati hanno costituito la base di riferimento nella progettazione del sistema ARI-LAB che è stato costruito, appunto, per lo sviluppo di capacità nella risoluzione di problemi aritmetici. ARI-LAB è un sistema che integra diversi ambienti: micromondi, data-base, un ambiente per la costruzione della soluzione, un ambiente per la comunicazione [Bottino & Chiappini, 1994/1995].
La ricerca relativa a questo sistema, oltre agli apporti precedentemente visti, si è avvalsa di riferimenti propriamente legati all'uso della tecnologia. In particolare, gli apporti più significativi ci sono pervenuti dalle ricerche sui micromondi, sulle interfacce di manipolazione diretta e sui sistemi per la comunicazione in rete.
Per quanto riguarda il ruolo dei micromondi

con interfacce di manipolazione diretta nell'apprendimento di contenuti matematici, ci si basa sull'assunto generale che questi, sotto precise condizioni, possano consentire l'accesso alla conoscenza integrando l'approccio percettivo-motorio con quello simbolico-ricostruttivo. In particolare, è possibile realizzare sistemi che consentono di operare su "oggetti computazionali", propri del micromondo, che, nell'interazione con il computer, arrivano ad assumere lo statuto di simboli di un sistema di rappresentazione dotato di proprie regole di trattamento interno.
I micromondi di ARI-LAB (monete, abaco, calendario, istogramma, ecc.) mettono a disposizione degli alunni mezzi risolutivi interamente controllabili in base alle esperienze che essi possiedono e tuttavia in grado di mettere correttamente in evidenza le differenti strategie matematiche coinvolte nella soluzione dei problemi, con le quali è possibile entrare in contatto sfruttando il patrimonio di esperienza che gli alunni costruisco anche fuori dalla scuola, insieme alla loro esperienza percettiva e motoria.
Tutte le strategie risolutive che possono essere coinvolte nella soluzione di problemi di struttura additiva e moltiplicativa (parte-parte-totale; totale-parte-resto; completamento; partizione; contenenza; ...) hanno la possibilità di essere reificate attraverso l'uso dei micromondi e di essere quindi controllate sul piano percettivo visuale e motorio.
L'uso di ARI-LAB nell'ambito di un'attività di classe fa si che la conoscenza aritmetica, così come oggi viene formalizzata e condivisa, possa arricchirsi di nuovi significati che dipendono dalle caratteristiche dei sistemi di rappresentazione e dell'interattività disponibile nei micromondi, ciascuno dei quali permette di presentare l'oggetto da insegnare sotto una certa interpretazione.
Inoltre i vari ambienti disponibili con il sistema e cioè i micromondi, l'ambiente per la comunicazione, l'ambiente data base, contribuiscono a strutturare un contesto d'uso in grado di mediare varie forme di assistenza alla prestazione dell'alunno, che sono profondamente diverse da quelle che normalmente si sviluppano nelle situazioni di apprendimento tradizionali.
Per esempio il data base disponibile in ARI-LAB permette di modellare l'attività dello studente attraverso processi di tipo imitativo.

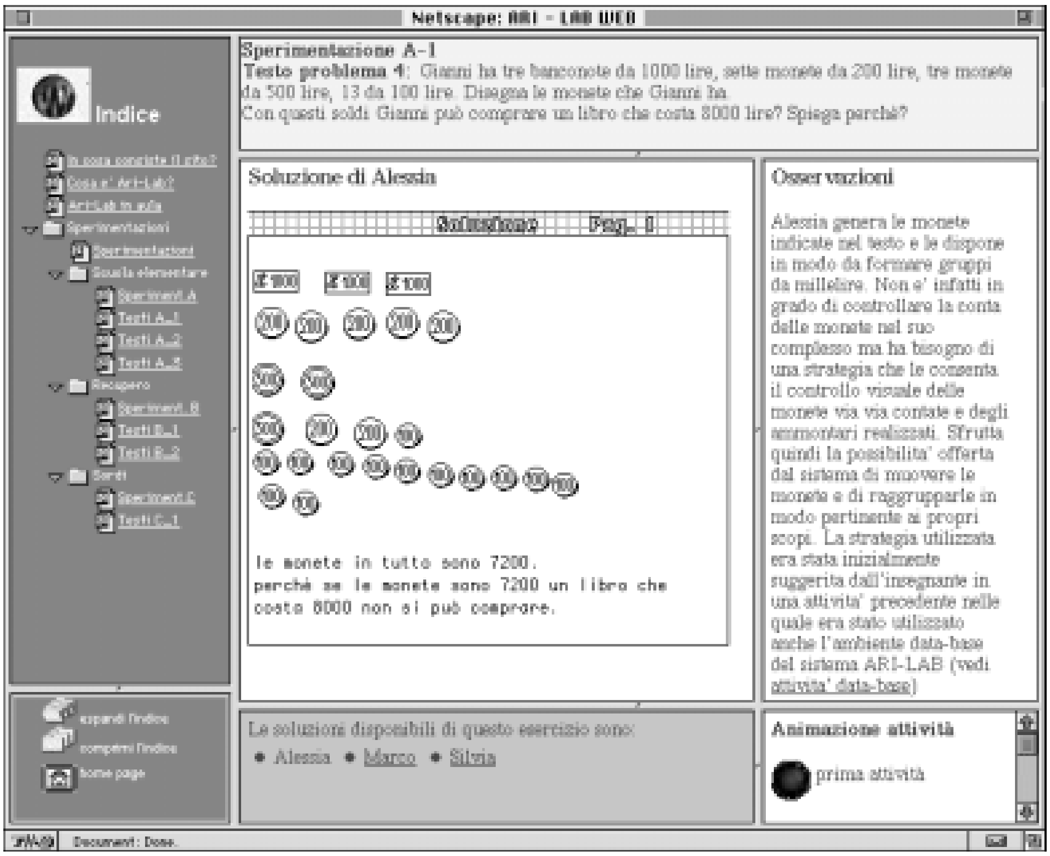

Figura 2
Pagina del sito ARI-WEB che presenta un esempio tratto da una sperimenatzione di ARI-LAB. Come si può vedere da questa pagina del sito è possibile visualizzare un filmato che mostra come la bambina sia arrivata a produrre tale soluzione, inoltre è possibile visualizzare la soluzione allo stesso problema realizzata da altri bambine della classe oppure visualizzare le soluzioni ad altri problemi o, anche, seguire altre sperimentazioni, ecc.

Questo ambiente offre allo studente un archivio di problemi risolti che egli può esplorare senza però poter copiare la soluzione nel proprio ambiente risolutivo. Questo fatto rende il processo di imitazione completamente diverso da quello che si realizza normalmente nella classe in quanto la riproduzione di una strategia presente nel data base comporta necessariamente la sua ricostruzione nell'ambiente dei micromondi.
L'insegnante, inoltre, può avvalersi dell'ambiente dei micromondi per porre domande, dare istruzioni con lo scopo di aiutarlo nel processo di pianificazione della strategia risolutiva, senza tuttavia sostituirsi a lui come invece succede nella pratica ordinaria con la correzione del compito alla lavagna. L'ambiente di comunicazione può mediare nuove forme di attività cooperativa tra gli alunni durante la soluzione dei problemi in grado di modificare in modo profondo le assunzioni e i criteri che ciascuno di loro utilizza per la soluzione dei problemi stessi.
Le sperimentazioni realizzate di questo sistema, i cui risultati sono oggi disponibili in un sito in via di realizzazione *(http: dida.ima.ge.cnr.it/arilab/home.html)*, esemplificano le trasformazioni che l'insegnamento dell'aritmetica può subire rispetto a quello usualmente adottato nella scuola). In figura 2 è riportata una pagina del sito in cui è presentato un esempio d'uso di ARI-LAB realizzato in una sperimentazione da un bambino e i commenti fatti dallo sperimentatore a riguardo.

Conclusioni

I sistemi di cui abbiamo parlato in questo articolo sono sistemi sviluppati nell'ambito di attività di ricerca orientata a studiare come il calcolatore possa contribuire a innovare la pratica didattica, trasformando il sistema di significati coinvolti nell'apprendimento di un certo sapere.
Tali sistemi, come messo in evidenza nell'articolo, contribuiscono a trasformare profondamente gli oggetti di insegnamento della matematica e a strutturare una pratica didattica innovativa per l'apprendimento dei contenuti matematici per i quali sono stati sviluppati.
Il loro utilizzo nella classe richiede quindi una profonda modifica dell'impostazione didattica utilizzata sino a quel momento dall'insegnante. Questa modifica potrà realizzarsi se gli insegnanti saranno messi nelle condizioni di appropriarsi della nuova epistemologia di sapere incorporata nell'attività mediata dai sistemi e della capacità di gestire il nuovo sistema di relazioni che prende vita in classe attraverso il loro utilizzo. Ciò pone notevoli problemi di formazione che, per essere efficace, dovrà essere basata su modelli differenti da quelli di tipo trasmissivo sino a oggi imperanti.
In un futuro intervento affronteremo l'argomento della formazione degli insegnanti e analizzeremo, anche tramite esempi, nuovi possibili modelli di formazione.

●

Riferimenti Bibliografici

Bottino R.M., Chiappini G., Ferrari P.L. (1994), A hypermedia system for interactive problem solving in *arithmetic, Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, AACE, Vol. 3, n° 3/4, 1994, 307-326.

Bottino R.M., Chiappini G. (1995), "ARI-LAB: models issues and strategies in the design of a multiple-tools problem solving environment", *Instructional Science*, Vol. 23, n°1-3, Kluwer Academic Publishers, 7-23.

Chevallard Y., 1985, *La transpositio didactique*, Editions La Pensée Sauvage.

Ferreiro E., Teberosky A., 1985, *La costruzione della lingua scritta nel bambino*, Giunti Barbera.

Laborde C. (1993), The computer as part of the learning environment: the case of geometry, in Keitel C. & Ruthven K. (eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, Nato Asi Series F, Vol. 121, Berlin: Springer Verlag, 48-67.

Laborde J.M. and Strasser R. (1990), 'Cabri-Géomètre: a microworld of geometry for guided discovery learning', *ZDM*, 90/5, 171-177.

Steinbring, H. (1997) Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics*, 32 (49-92).

Yerushalmy M., Chazan D. (1990), Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer, Educational Studies in *Mathematics*, 21, 3, 199-219.

●