
Lo sviluppo del pensiero matematico in bambini normali e con difficoltà di apprendimento

Levy Rahmani
Università di Tel Aviv, Centro di Riabilitazione Loewenstein, Raanana, Israele

Una proposta metodologica per favorire lo sviluppo di abilità logiche

Le pubblicazioni che riguardano la risoluzione di problemi logico-linguistici prendono generalmente in esame le diverse componenti di questa attività intellettuale, ciascuna delle quali può essere fonte di difficoltà per studenti di ogni livello, inclusi quelli della scuola superiore (Schoenfeld, 1985).

Sono attualmente in uso due diversi tipi di programmi didattico-riabilitativi che mirano a migliorare le capacità cognitive (in particolare l'abilità di pensare in modo sistematico e di risolvere i problemi con efficacia): il primo è di tipo generico, ossia non collegato ad una particolare materia di studio, mentre l'altro è basato su specifiche materie curriculari.

Il primo tipo si basa sul presupposto che lo sviluppo di processi cognitivi fondamentali (o "prerequisiti") attraverso una serie di compiti ed esercizi non legati ad una materia specifica produca un effetto generalizzato sull'intelletto del bambino, effetto che trova poi riscontro in un ampio spettro di materie scolastiche (Feuerstein, 1980; Sanchez and Hervas Aviles, 1993). Il secondo tipo di programma si fonda invece sulla convinzione che determinate discipline possano essere insegnate in modo tale da produrre sugli alunni un beneficio che varchi i confini delle discipline stesse.

Le due posizioni sono state opportunamente riassunte da Keating and Krane

(1990): "Le argomentazioni a favore dell'impostazione per materia (...) si basano sull'ipotesi di lavoro che, man mano che si acquisiscono nuove abilità, i processi cognitivi sottesi diventano sempre più sofisticati".

Le argomentazioni, invece, a favore dell'indipendenza da una specifica materia curricolare si basano sul presupposto che: "processi cognitivi superiori o di più ampio spettro diano luogo all'acquisizione di vari tipi di abilità...".

UN PROGRAMMA DIDATTICO-RIABILITATIVO

In questo articolo si illustra un programma didattico-riabilitativo che, attraverso una serie piuttosto ampia di problemi logico-matematici, si propone di migliorare la capacità di pensare in modo sistematico per affrontare le diverse situazioni di vita quotidiana, andando quindi oltre la risoluzione dei problemi matematici.

Il programma è indicato per alunni normali della scuola dell'obbligo, dalla quarta alla seconda media, nonché per bambini con problemi di apprendimento.

Si compone di:

- a) un manuale con 82 esercizi, divisi in 16 gruppi, con ampie analisi e spiegazioni sul modo di affrontarli;
- b) un programma software che presenta 100

problemi.

Una versione italiana del manuale ebraico originale è stata pubblicata l'anno scorso (Rahmani, 1993).

L'intero programma didattico scaturisce dall'esperienza acquisita nei maggiori istituti israeliani per la riabilitazione di adulti e bambini con lesioni cerebrali presso i quali sono attualmente in fase di realizzazione varie tecniche tese a migliorare le capacità di apprendimento e di riflessione; oltre che dalla pratica ospedaliera, gran parte dell'esperienza acquisita deriva dall'attività scolastica. I problemi matematici vengono usati sia con gli adulti che con i bambini e si sta formando una notevole esperienza in questo settore.

OBIETTIVI

Il lavoro effettuato ha mirato a conseguire i seguenti obiettivi:

1. *Sviluppare la comprensione di un problema matematico come un insieme di relazioni fra i dati forniti, le principali domande relative alle informazioni da ottenere e le operazioni da compiere.*

L'obiettivo è quello di fare in modo che lo studente comprenda meglio la natura dei problemi matematici e distingua più chiaramente, in un determinato problema, le informazioni ricavabili da quelle non ricavabili; ci si aspetta che lo studente si eserciti a distinguere, in base ai dati forniti, fra dati mancanti significativi e dati mancanti di minor rilievo. Un tipo di problema di grande interesse (in cui è evidente la difficoltà di distinguere fra informazioni disponibili e indisponibili) è quello che fornisce dati solo sui rapporti fra le quantità e nessun dato sulle quantità stesse. Talvolta persino in quinta elementare, o addirittura in prima media, capita che gli alunni non intravedano la possibilità di ricavare informazioni aggiuntive dai dati forniti. Occorre pertanto insegnare agli studenti a distinguere, fra due problemi, la differenza nel tipo di informazione aggiuntiva che può essere ricavata da ciascuno di essi.

2. *Sviluppare la capacità di vedere il problema da affrontare come un esempio di una certa tipologia.*

A tal fine, occorre essere in grado di trasferire l'esperienza acquisita da un problema all'altro e di estrarre i principali elementi comuni ai problemi in termini di rapporto fra:

a) dati noti

b) domande relative ai dati mancanti

c) operazioni aritmetiche appropriate.

Nell'opinione comune, la capacità di estrapolare concetti trasferendoli da un problema all'altro costituisce uno dei principali limiti all'acquisizione di conoscenze in campo matematico. Ciò vale soprattutto nel caso dei bambini con problemi di apprendimento i quali mostrano gravi difficoltà a sviluppare strategie e abilità metacognitive (Rahmani, 1992).

Il programma mira ad accrescere in modo sistematico la capacità di controllo e monitoraggio della propria attività intellettuale, permettendo di acquistare consapevolezza del modo in cui si raggiunge un determinato risultato nello svolgimento del compito assegnato. Lo specifico obiettivo perseguito è quello di migliorare la capacità di generalizzazione, attraverso la ricerca di analogie fra problemi differenti.

3. *Sviluppare la capacità di gestire i problemi centrati su situazioni incerte e possibili.*

In molti momenti della vita quotidiana ci si trova di fronte a situazioni non chiaramente definite nelle quali occorre valutare le varie possibilità di azione e prendere decisioni adeguate. I problemi matematici possono contribuire significativamente a sviluppare la capacità di affrontare tali situazioni. Problemi di questo tipo possono presentare dati che non portano a conclusioni precise, ma possono anche essere utilizzati tipi di problemi in cui le conclusioni possono erroneamente apparire come certe, mentre, al contrario, altre situazioni possono erroneamente venire considerate impossibili.

Per fare un esempio, in uno dei problemi proposti gli alunni imparano che basandosi unicamente sui dati relativi alla differenza fra le velocità medie di due aerei (400 km/h contro 600 km/h) non si può concludere quale sia la differenza fra le distanze da loro percorse anche se è probabile che i bambini, a tutta prima, credano che il secondo aereo abbia necessariamente percorso una distanza maggiore.

In un altro esempio, si chiede ai bambini di mettere in relazione due persone con stipendi mensili diversi (non specificati) i quali risparmiano la stessa quota di stipendio per comprare un certo prodotto. I bambini imparano che non si può concludere con certezza

che la persona con lo stipendio più alto comprerà un prodotto più caro. Chi affronta questi problemi acquista una percezione migliore dell'incertezza di alcune situazioni e riesce a distinguere meglio fra conoscenze assolute e conoscenze relative.

4. Sviluppare la flessibilità degli alunni nella gestione dei problemi, ossia renderli più consapevoli del fatto che è possibile affrontare un problema in più modi diversi.

I bambini sono condotti a distinguere fra diverse sequenze di domande e di calcoli utili per arrivare alla soluzione. Detto nei termini della psicologia cognitiva contemporanea, in particolare con il termine di "problem space" usato da Newell, esiste più di un modo per passare dallo "stato di problema" allo "stato di soluzione" ed esistono molte analisi di "mezzi per raggiungere una finalità". Il programma si occupa principalmente di sviluppare la capacità dei bambini di staccarsi da una determinata impostazione del problema e spostarsi verso un'altra ottica. I problemi studiati specificatamente per questo scopo si rifanno alla seguente tipologia: una certa quantità (di soldi, materiali, ecc.) viene divisa in parti disuguali; la quantità e la differenza fra le parti sono note ma le parti stesse non lo sono. Per risolvere tali problemi, occorre distinguere fra due percorsi diversi.

5. Portare la comprensione dei problemi a livelli sempre più astratti.

Il raggiungimento di questo scopo è strettamente collegato con il precedente. Per gestire dati relazionali occorre una capacità di astrazione maggiore di quella necessaria per gestire dati quantitativi. È possibile che la sottrazione aritmetica di una data quantità da un'altra non aiuti a ricavare informazioni aggiuntive, ma che queste possano invece risultare da un'operazione di divisione tra quantità. Consideriamo diversi livelli di astrazione attraverso un esempio: confrontiamo il volo di due aerei di cui non si conosce la velocità media ma di cui sappiamo che hanno percorso distanze diverse (note) per durate diverse (che sono anche note).

La sottrazione di una distanza dall'altra non consente di ottenere informazioni sulla velocità dei due aerei. Ovviamente, se vogliamo calcolare la velocità media di ciascun aereo dobbiamo dividere la distanza percorsa per il tempo di volo; volendo calcolare

anche il rapporto fra le velocità medie dei due aerei, occorre dividere la distanza coperta da un aereo per il suo tempo di volo, compiere la stessa operazione per l'altro aereo e calcolare poi il rapporto fra le velocità ottenute. In questo caso, quindi, si ottiene il dato specifico riguardo al terzo parametro del volo e lo si usa poi per confronto. Ma se si vuole confrontare soltanto la velocità dei due aerei o comunque tutti e tre i parametri del volo, non c'è bisogno di calcolare la velocità di ciascun aereo: basta trovare il rapporto fra le due distanze, il rapporto fra le due durate di volo, e dividere i due rapporti per ricavare il rapporto fra le velocità dei due aerei. Si tratta di un grado più alto di astrazione poiché non ci interessano più gli specifici valori dei tre parametri ma soltanto i rapporti fra di essi. Questi rapporti sono indipendenti dagli specifici valori. Ovviamente, il massimo livello di astrazione si raggiunge con i problemi che contengono soltanto dati relazionali.

6. Sviluppare l'abilità dello studente di farsi un'idea globale e integrale del problema fin dal primo approccio con la sua "trama".

Il programma mira a formare l'abitudine cognitiva di afferrare tutti i dati rilevanti disponibili nel testo ed impiegarli nel processo di risoluzione. La parola chiave in questo contesto è "pianificazione".

METODOLOGIA

Per raggiungere gli obiettivi suddetti si utilizza una metodologia che impiega una serie di procedure strettamente interconnesse. Il manuale e il programma software hanno in comune elementi essenziali; naturalmente vi sono anche delle differenze qualitative dovute alle funzionalità e alle caratteristiche del mezzo cioè dell'elaboratore. Sia i tratti comuni che le diversità vengono esaminati nella sezione seguente.

1. Il contenuto, ossia la "storia" del problema.

Nel manuale esiste un singolo tema che viene riproposto in un'intera serie di problemi: quello di una persona con uno stipendio mensile fisso che ne risparmiano una quota per un certo periodo per comprare un prodotto di un certo valore; vengono forniti dati parziali variabili relativi alle componenti

sudette, o sotto forma di quantità determinate, o in termini relazionali (frazioni, percentuali); occorre confrontare due o più persone per pervenire a conclusioni sicure o possibili. Per contro, i 95 problemi inclusi nel software trattano argomenti svariati: persone che risparmiano parte dello stipendio, fabbriche che usano materiale grezzo per ottenere prodotti finiti, veicoli in movimento, camion con diverse capacità di carico, candidati nei concorsi pubblici, ecc.

2. Raggruppamento dei problemi.

I problemi, sia nel manuale che nel software, sono divisi per gruppi. I gruppi sono di complessità crescente, ottenuta sia aumentando il numero delle componenti del problema sia innalzando il livello di astrazione. All'interno dei gruppi esistono ulteriori sottoinsiemi di problemi: ad esempio, un certo dato fornito in uno dei problemi può diventare il dato da ricavare in un altro. In classe, gli studenti vengono incoraggiati a prevedere la successione dei problemi che fanno parte di un insieme e persino a partecipare alla composizione degli stessi. (Si consiglia agli insegnanti di assegnare come compito a casa, invece di semplici esercizi di calcolo, la composizione di problemi del tipo già sperimentato in classe).

3. Formulazione delle domande.

I problemi sono presentati senza le relative domande: per risolvere un problema, lo studente deve cominciare col formulare la domanda giusta. In questo modo, persino il problema più elementare diventa un mezzo per stimolare la riflessione. Questa procedura mira ad aiutare gli studenti a comprendere il testo di un problema e a sviluppare la capacità di afferrare appieno i dati più importanti. Inoltre, dovrebbe portare lo studente a collegare in modo appropriato la trama del problema con le domande e le operazioni aritmetiche. L'importanza dell'imparare a fare domande sulla base dei dati è stata recentemente sottolineata in modo convincente da Langrehr (1993).

Il numero delle domande da porre è specificato sia nel manuale che nel programma e varia in funzione dei dati del problema. Non è un numero arbitrario e non si ha la possibilità di scegliere fra diverse domande possibili dello stesso tipo. Le domande poste per un determinato problema devono coprire tutti i dati disponibili. Le condizioni alla base di

una domanda adatta, cioè conforme al numero richiesto, non vengono palesate allo studente all'inizio del lavoro ma devono essere scoperte durante il corso del processo di apprendimento. Limitando il numero delle domande da porre, si costringe lo studente a valutare diverse alternative e a pervenire alle domande più appropriate, nonché ad adattare le domande ai problemi: una domanda inadeguata per un certo problema può risultare la migliore in un altro caso. Quindi, le domande possibili variano da quella migliore a quelle inaccettabili.

4. Scelta delle domande.

Nel manuale, le domande devono essere prodotte dallo studente, mentre nel programma software devono essere selezionate. Viene presentata una serie di alternative fra cui selezionare le domande più adatte. Ma, a differenza dei classici esami basati sulle scelte multiple, qui si sottopone allo studente una domanda per volta e lo studente deve decidere se quella che gli viene presentata è la migliore. La scelta dovrebbe basarsi sull'esperienza acquisita dallo studente nei problemi precedenti, sulla comprensione del testo del problema stesso e sulla valutazione delle domande già proposte dal programma.

Le domande vengono presentate singolarmente per due ragioni principali:

- a) per sviluppare negli studenti un comportamento anticipatorio, di modo che facciano supposizioni sempre più fondate circa le domande in arrivo man mano che la lista delle domande si avvicina alla fine. Il confronto fra domande presunte ed effettive provoca un livello di riflessione più profondo di quello che deriverebbe semplicemente dallo "scorrere" le domande per individuare quelle più adatte.
- b) per migliorare la capacità degli studenti di afferrare integralmente un problema con tutti i suoi dati e le sue domande. Questo aspetto del software è evidente in tutti i problemi che prevedono più di una domanda e in cui le risposte sono legate a quelle fornite alle domande precedenti. La decisione di accettare o scartare una domanda presentata all'inizio della serie richiede una comprensione sempre più approfondita del problema nel suo complesso, particolarmente quando la domanda dipende da tutte quelle precedenti.

C'è poi un'altra questione, quella dell'esecuzione di operazioni aritmetiche. Sebbene

queste non vengano richieste direttamente, nella maggioranza dei problemi la scelta delle domande più adatte comporta dei calcoli. Le operazioni non vengono effettuate sul computer bensì sulla carta e, anche se non vengono controllate direttamente, la loro correttezza si riflette sulle domande selezionate. La possibilità che vengano fornite "casualmente" risposte corrette è esclusa. Lo stesso tipo di problema è presentato ripetutamente con contenuti variabili e le domande vengono anch'esse espresse in modi diversi. Questo modo di presentare i problemi matematici giova senz'altro agli studenti brillanti, poiché evita di dover indicare come vengono eseguite le operazioni aritmetiche.

5. Valutazione e spiegazione.

Il punteggio collegato alla valutazione delle domande proposte dallo studente va da 1 a 4. Se lo studente sceglie la domanda più adatta riceve 4. Nel caso in cui la escluda, gli viene comunicato che ha scartato una domanda da 4 punti. Il 3 viene assegnato per le domande plausibili, che potrebbero cioè risultare le migliori in circostanze diverse (ad esempio, se fossero necessarie più domande e se quella scelta fosse fra le domande aggiuntive). Il 2 viene assegnato per le domande a cui è possibile dare risposta ma che non soddisfano altre condizioni (per esempio, in un problema che prevede una sola domanda, quando questa non copre tutti i dati e rappre-

Il programma Helios e la banca dati Handynet

HELIOS

HELIOS (Handicapped people in the European community Living Independently in an Open Society) è un programma di azione comunitaria a favore dei portatori di Handicap. HELIOS II copre il periodo 1993-1996 e segue al programma Helios I (1988-1991); è gestito dalla divisione "Integrazione dei portatori di handicap" della Commissione delle Comunità europee (DGV.E.3) assistita da una équipe di esperti.

Le attività previste da HELIOS II coprono cinque settori prioritari: la riabilitazione funzionale; l'integrazione nel quadro dell'educazione; l'integrazione nel quadro della formazione e della rieducazione professionale; l'inserimento economico; l'inserimento sociale e la vita autonoma.

HELIOS inoltre promuove attività di scambio e di informazione con gli stati membri e le organizzazioni non governative (ong); dappertutto in Europa, sorgono iniziative originali ed efficaci che permettono di andare incontro, in maggior misura ed in maniera più adeguata, alle specifiche esigenze dei portatori di handicap. Uno degli obiettivi del programma HELIOS è di fare in modo che tali iniziative siano conosciute e diffuse e che possano essere messe a profitto anche da altri paesi comunitari. A tale scopo HELIOS organizza conferenze, seminari, visite di studio, tirocini di formazione e gruppi di lavoro, in collaborazione sia con gli Stati membri che con le organizzazioni non governative (ONG) o con i consigli nazionali dei portatori di handicap. Tali attività sono organizzate in base a temi scelti di anno in anno ed i partecipanti vengono scelti, a seconda dei casi, dagli Stati membri o dalle ONG.

Il programma HELIOS può sostenere finanziariamente determinate attività di organizzazioni non governative di portatori di handicap, purché abbiano una vocazione europea. Tuttavia HELIOS non distribuisce alcun sussidio alle istituzioni ed in alcun modo può intervenire in casi individuali.



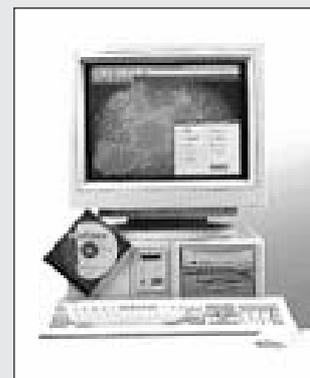
HANDYNET

HANDYNET è un sistema di informazione e di documentazione computerizzato rivolto ai portatori di handicap ed agli operatori della riabilitazione mette a loro disposizione decine di migliaia di informazioni relative a:

- ausili tecnici (vale a dire gli oggetti e il materiale adatti)
- fabbricanti e distributori in Europa di tali prodotti
- procedure e regolamentazioni nazionali che i portatori di handicap devono seguire per ottenere tali ausili tecnici.

Queste informazioni sono riunite in una banca dati in nove lingue diffusa su CD-ROM, accessibile in numerosi centri istituiti dai 12 Stati membri. HANDYNET offre anche un servizio di posta elettronica.

HELIOS
Av. de Cortenberg 79 b -
1040 Bruxelles (Belgio)
Tel.: 32-2-735.41.05



senta una delle tante alternative possibili). Il voto più basso viene assegnato per le domande illogiche o quelle che non rientrano nella sfera dei dati forniti, e così via. Oltre ad ottenere l'effetto desiderato di valutare le domande in base alla riflessione del bambino (in particolare in base alla sua abilità di affrontare una data informazione da diversi punti di vista), la procedura proposta è studiata per ridurre l'ansia dello studente di fronte ai problemi di logica matematica. Gli esercizi matematici in cui la risposta è graduata per livelli anziché essere semplicemente giusta o sbagliata permettono entro certi limiti di compiere errori e mettono in luce i miglioramenti anche nel caso in cui lo studente non riceva il voto più alto. In un certo senso, questi esercizi avvicinano la matematica alle altre materie scolastiche.

I voti sono seguiti dalle spiegazioni. Ogni tipo di domanda ha la sua spiegazione, ma le spiegazioni possono essere generalizzate in quanto si adattano a vari problemi e vengono quindi riproposte ripetutamente. Vi sono 95 problemi con diverse centinaia di domande ma soltanto 74 spiegazioni. La spiegazione è un mezzo aggiuntivo per arrivare alla generalizzazione e all'estrapolazione da un problema all'altro. Il bambino riceve la stessa spiegazione sia che si tratti di un problema di denaro risparmiato, che di candidati nelle elezioni, automobili in viaggio, merce prodotta nelle fabbriche, ecc.

6. Aumento di complessità ed astrazione

I problemi forniti sono di complessità crescente, determinata dall'aumento del numero dei dati, dal tipo di domande e di operazioni aritmetiche richieste. È richiesto un numero sempre maggiore di domande da formulare in precisa successione e lo studen-

te è sempre più sollecitato a prevederne la concatenazione e a pianificare il processo di risoluzione. I problemi diventano anche sempre più astratti, da quelli che consistono esclusivamente di dati quantitativi, a quelli che uniscono dati quantitativi a dati relazionali, e infine a problemi composti di sole relazioni. I problemi basati sui confronti sono una categoria particolare, che richiede capacità di astrazione: una coppia aggiuntiva di dati deve essere ricavata partendo da due coppie di rapporti noti. In gran parte del programma software, lo studente deve distinguere fra due diversi percorsi che si possono seguire per risolvere un certo tipo di problema: la divisione di una quantità in due (e poi in tre) parti disuguali, portando l'esperienza dai dati numerici ai dati relazionali. Questo tipo di problema chiude la serie presentata.

CONCLUSIONI

In conclusione, la metodologia brevemente descritta dovrebbe portare al raggiungimento degli obiettivi illustrati nella prima parte di questo articolo. Essenzialmente, gli obiettivi e i mezzi adottati sono derivati dai fondamenti dalla psicologia cognitiva moderna. La convinzione su cui si basa il lavoro è che questa modalità di insegnamento della matematica possa giovare a studenti con livelli diversi di abilità intellettuale. Il sistema è sufficientemente flessibile per adattarsi anche ai casi particolari. Finora sono stati condotti interventi di piccola portata con studenti singoli e piccoli gruppi di studenti, sia normali che con difficoltà di apprendimento, e si stanno ora raccogliendo i primi risultati diretti relativi all'efficacia della metodologia proposta.

Traduzione italiana a cura di Stella De Robertis

Riferimenti Bibliografici

Feuerstein, R. (1980) *Instrumental enrichment: an intervention program for cognitive modifiability*. Baltimore, MD: University Park Press.

Keating, D.P. e Crane, L.L. (1990) "Domain-General and domain-specific processes in proportional reasoning: a com-

mentary on the Merrill-Palmer Quarterly special issue on cognitive development." *Merrill-Palmer Quarterly*, July 1990, 36, (3), 411-424.

Langrehr, J. (1993) "Learning how to question information". *Teaching Thinking and Problem Solving*, 15 (1), 1-5.

Prieto Sanchez, M.D. e Hervas Aviles, R. (1993) "Fostering thinking skills and strategies using instrumental enrichment: A study from Spain". *Teaching Thinking and Problem Solving*, 15 (1), 9-13.

Rahmani, L. (1992) "Neuropsychological

rehabilitation of children: development of learning strategies and problem solving abilities", in: *Neuropsychologia dell'età evolutiva. Atti del III Corso di aggiornamento in neurologia infantile*, Venezia, San Servolo, 11-13 Marzo 1991, pp. 244-252.

Rahmanil, L. (1993) A

new pedagogy of mathematics, Roma, Marrapese.

Shonfeld, A.H. (1985) "Psychological and mathematical method: a capsule history and a modern view". *Education and urban Society*, August 1985, 17, (4).