Valutazione automatica di soluzioni parziali

Automatic evaluation of partial solutions

Giuseppe Fiorentino, Giuliano Pacini | Accademia Navale di Livorno | Livorno (IT) | fiorentino@dm.unipi.it; pacinig@alice.it

✉ **Giuseppe Fiorentino** | Accademia Navale di Livorno | Viale Italia 72, 57127 Livorno, Italia | fiorentino@dm.unipi.it;

Sommario Un approccio ben consolidato per la soluzione di un problema non banale prevede di scomporlo in una gerarchia di sottoproblemi più semplici (divide et impera). La stessa scomposizione può essere adottata come base per la valutazione parziale, attribuendo allo studente i meriti derivanti dai sottoproblemi risolti. L'articolo parte da questa convergenza per analizzare la fattibilità pratica della valutazione automatica di soluzioni parziali e proporre una regola di valutazione automatica applicabile a un'ampia gamma di problemi.

PAROLE CHIAVE Problem posing, Problem solving, Valutazione parziale, Valutazione automatica.

Abstract A well-established approach for the solution of a non-trivial problem requires to split it into a hierarchy of simpler sub-problems (divide and rule). The same splitting can be taken as the basis for partial evaluation, attributing the credits arising from solved sub-problems to the student. The paper starts from this convergence to analyse the feasibility of automatic evaluation of partial solutions and proposes an automatic evaluation rule that can be applied to a wide range of problems.

KEY-WORDS Problem posing, Problem solving, Partial evaluation, Automatic evaluation.

INTRODUZIONE

Uno degli obiettivi primari della didattica moderna è la "competenza", spesso intesa come la capacità di utilizzare le conoscenze in contesti operativi realistici (Baldacci, 2010; Ufficio Scolastico Regionale per la Lombardia, 2013). In tale ottica, una conoscenza risulta acquisita solo quando si riflette nella capacità di risolvere problemi. La didattica oggi si caratterizza anche per l'importanza attribuita alla valutazione: abbandonato il puro accertamento delle conoscenze, questa viene integrata nell'attività didattica fornendo così continuo stimolo e feedback per lo studente (Assessment Reform Group, 2002; Black & Wiliam, 2009; Crooks, 2001). Combinando le due cose, la valutazione dovrebbe accompagnare lo studente mentre risolve problemi e non manifestarsi soltanto quando la soluzione è completa; al contrario, dovrebbe stimare il merito di soluzioni incomplete o parzialmente corrette (Ashton, Beevers, Korabinski, & Youngson, 2006; Cerval-Pena, Hermans, & Sangwin, 2008; Fabrizio, Fiorentino, & Pacini, 2011; Fife, 2011).

Una valutazione formativa di questo tipo (Black & Wiliam, 2009; Crooks, 2001) è però onerosa. Una via d'uscita è offerta dalla ricerca e dagli sviluppi nel campo della Computer-Aided Assessment (Ashton, Beevers, & Thomas, 2008; Butcher, Hunt, & Sangwin, 2013; Sangwin, 2012) e degli Intelligent Tutoring Systems (Conati, 2009; Vanlehn, 2006). I sistemi informatici possono affiancare efficacemente il docente nel valutare e guidare gli studenti. L'articolo analizza la fattibilità della valutazione automatica di soluzioni parziali, discutendone le precondizioni, le principali difficoltà e proponendo uno schema attuativo.

PROBLEMI E SOLUZIONI

Prima di addentrarci nel vivo della discussione, è utile introdurre alcuni concetti relativi ai problemi, alle soluzioni e alla valutazione.

Problemi concreti e problemi parametrici

L'idea di problema nasconde un'ambiguità derivante da ciò che si considera come soluzione accettabile. Come esempio, si consideri il calcolo della velocità di atterraggio di un grave che cade da un'altezza data. Il problema può essere posto in più modi:

- Se un grave cade da un'altezza di 10 metri, con quale velocità arriva al suolo?
- Se un grave cade da un'altezza di *H* metri, con quale velocità arriva al suolo?

Intuitivamente, nel primo caso si tratta di un problema concretamente specificato, nel secondo di uno parametrico. La differenza risiede nella forma della soluzione attesa. Infatti, se il problema viene proposto con dei dati concreti, ci si aspetta che la soluzione sia altrettanto concreta. Quindi, risolvendo il problema concreto ci si attende come risultato il valore $v = 14\ m/s$ mentre nel caso del problema parametrico ci si aspetta come soluzione una formula del tipo $v = \sqrt{2gH}\ m/s$.

In generale, la soluzione di un problema parametrico è una formula, una regola o un algoritmo in grado di ottenere il risultato concreto per ogni valore concreto del parametro. Nel seguito ci occuperemo di problemi parametrici e, ai fini della valutazione automatica, daremo per scontato che la soluzione sia esprimibile con un formalismo eseguibile. Per brevità li chiameremo semplicemente "problemi".

Divide et impera

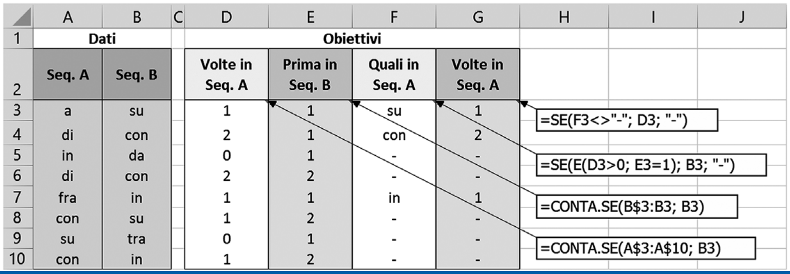
Considerato un problema non banale, un approccio classico per arrivare alla soluzione è il *divide et impera*. Questo prevede di scomporre il problema in una gerarchia di sottoproblemi più semplici, risolti i quali si ottiene la soluzione del problema originale. S'intende che, nella risoluzione di ciascun sottoproblema, è lecito utilizzare i risultati che si ottengono risolvendo i sottoproblemi che lo precedono. Preciseremo il tutto dicendo che, dato un problema P, scomposto in sottoproblemi P_1, …, P_n, risolvere P vuol dire fornire una soluzione $\mathbf{S}_i$ per ciascuno dei sottoproblemi P_i. Ogni soluzione potrà fare riferimento ai dati iniziali del problema oppure ai risultati ottenuti dalle soluzioni degli altri sottoproblemi. Consci che il *divide et impera* non è l'unica strategia risolutiva (Polya, 1957), riteniamo tuttavia che sia quella che meglio si abbina agli ambienti informatici più usati per il problem posing e il problem solving. Come esempi concreti si pensi a Excel, Access o a GeoGebra. Con Excel, le soluzioni sono espresse con delle formule che possono riferire i risultati di altre formule. Con Access la scomposizione delle interrogazioni complesse in query di query è quasi inevitabile. Infine, con GeoGebra una costruzione è sempre organizzata come una serie di passi interdipendenti. D'altronde, come verrà discusso nel seguito, la scomposizione in sottoproblemi può essere anche posta alla base della valutazione parziale, attribuendo allo studente i meriti derivanti dai sottoproblemi effettivamente risolti.

Riprendendo la notazione introdotta per problemi e sottoproblemi, diremo che $\mathbf{S}_i$ *usa* $\mathbf{S}_j$ se $\mathbf{S}_i$ fa riferimento al risultato che si ottiene con $\mathbf{S}_j$. I riferimenti (cioè gli usi) inducono una struttura di precedenze e discendenze nella collezione dei sottoproblemi. Diremo che P_i è un *discendente immediato* di P_j (e lo indicheremo con $P_i > P_j$) se $\mathbf{S}_i$ usa $\mathbf{S}_j$. Quando P_i è un discendente di P_k e P_k è un discendente di P_j, diremo che P_i è un discendente (*non immediato*) di P_j. Al contrario, P_j sarà un *precedente* (eventualmente *non immediato*) di P_i.

Un esempio con Excel

Per calare in un contesto operativo quanto diremo, si consideri il problema in Figura 1, risolto con Excel.

A partire dalle sequenze Seq. A e Seq. B, nelle colonne A e B, si vuol costruire la colonna F in modo che vi compaiano, una volta sola, gli elementi di Seq. B presenti anche in Seq. A, affiancati in colonna G dal conteggio delle apparizioni in Seq. A. La Figura 1 mostra anche due sottoproblemi, i cui risultati sono utili per ricavare le colonne F e G. In colonna D, per ogni elemento di Seq. B, si calcola quante volte compare in Seq. A. In colonna E, invece, per ogni elemento di Seq. B, si calcola quante volte appare nella porzione di Seq. B che lo precede, in modo che alla prima apparizione corrisponde il valore 1. La Figura 2 illustra la gerarchia degli usi, indotta dalle formule in Figura 1, con le corrispondenti relazioni di discendenza. In tale rappresentazione ciascun sottoproblema è denotato con la colonna in cui va risolto.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Dati			Obiettivi						
2	Seq. A	Seq. B		Volte in Seq. A	Prima in Seq. B	Quali in Seq. A	Volte in Seq. A			
3	a	su		1	1	su	1			
4	di	con		2	1	con	2			
5	in	da		0	1	-	-			
6	di	con		2	2	-	-			
7	fra	in		1	1	in	1			
8	con	su		1	2	-	-			
9	su	tra		0	1	-	-			
10	con	in		1	2	-	-			

Figura 1. *Un problema risolto mediante scomposizione in sottoproblemi.*

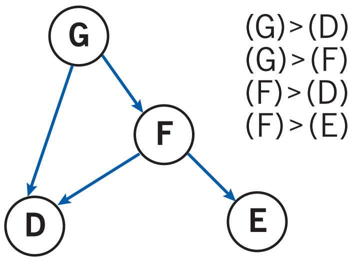


Figura 2. *Una gerarchia di sottoproblemi con le loro dipendenze.*

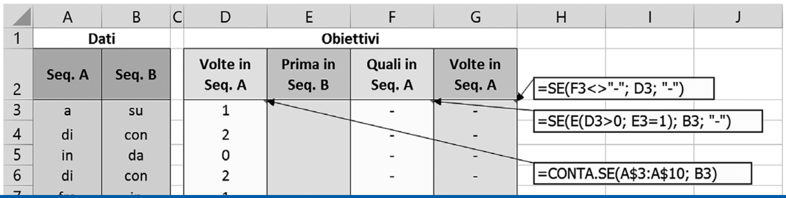
ESERCIZI DI PROBLEM SOLVING

Come accennato in precedenza, la scomposizione in sottoproblemi, tipica delle soluzioni *divide et impera*, può essere posta anche alla base della valutazione parziale, calcolando il merito dei sottoproblemi effettivamente risolti (Ashton, Beevers, Korabinski, & Youngson, 2006; Cerval-Pena, Hermans, & Sangwin, 2008; Fabrizio, Fiorentino, & Pacini, 2006). Tuttavia, la confluenza della valutazione parziale e della metodologia risolutiva nella scomposizione in sottoproblemi nasconde un contrasto. Infatti, la valutazione parziale porta a comunicare la collezione dei sottoproblemi allo studente, in modo che questi possa limitarsi a risolverne una parte. D'altro canto, individuare i sottoproblemi è un aspetto non trascurabile della soluzione, per cui comunicarli allo studente equivale a proporgli un problema già parzialmente risolto.

Gerarchie da riconoscere

La contraddizione può essere conciliata osservando che la valutazione parziale, come qui intesa, richiede l'esplicitazione dei sottoproblemi ma non la loro gerarchia. Dunque, allo studente si potrà comunicare solo la collezione dei sottoproblemi, lasciandogli sia l'onere di riconoscerne le dipendenze funzionali sia la possibilità di riferirli tutti liberamente. In tal modo, lo studente potrà scegliere il sottoproblema da affrontare, usando gli altri come se fossero già risolti.

Si realizza così un compromesso tra l'attuazione della valutazione parziale e la valutazione delle capacità di problem solving. Lo studente dimostrerà di dominare il problema nella sua interezza riconoscendo le relazioni tra i sottoproblemi. D'altronde, stimolare il riconoscimento delle dipendenze gerarchiche è un'efficace impostazione didattica per sviluppare le capacità di problem solving, intese come l'attitudine all'analisi, alla sintesi e all'organizzazione (Fabrizio, Fiorentino, & Pacini, 2006; Shores, Hoffmann, Nietfeld, & Lester, 2012).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Dati			Obiettivi						
2	Seq. A	Seq. B		Volte in Seq. A	Prima in Seq. B	Quali in Seq. A	Volte in Seq. A			
3	a	su		1		-	-			
4	di	con		2		-	-			
5	in	da		0		-	-			
6	di	con		2		-	-			

Figura 3 *La formula in colonna F riferisce un sottoproblema non risolto.*

Riprendendo l'esempio precedente, la Figura 3 illustra una soluzione parziale dove la formula per il sottoproblema (E) non è stata ancora scritta. Questo non ha impedito di far riferimento alle celle vuote della colonna E, in modo da scrivere le formule corrette per i sottoproblemi (F) e (G), anche se queste colonne mostrano al momento dei risultati non significativi. D'altra parte, l'opportunità che lo studente veda i risultati delle sue formule non riguarda le attività di valutazione, ma è semmai da rapportare alle scelte didattiche del docente (Fiorentino, 2010).

I pesi dei sottoproblemi

Ai fini della valutazione parziale, è opportuno associare a ogni sottoproblema una misura dell'impegno e delle competenze richieste per risolverlo (Fabrizio et al., 2006). Considerato un sottoproblema Q, chiameremo *peso* di Q tale misura, denotandola con $\mathcal{P}(Q)$.

Nell'ambito in cui operiamo, dove ogni sottoproblema Q va risolto all'interno di una gerarchia, $\mathcal{P}(Q)$ non misura l'impegno richiesto per risolverlo *da solo*, ma quello ancora necessario avvalendosi di tutti i suoi precedenti (Fabrizio et al., 2006). In questo senso, i pesi sono sempre relativi a una gerarchia di precedenze; tanto è vero che, nel seguito, assumeremo che ogni esercizio sia sempre corredato da una *soluzione conforme*, da prendere come riferimento per la definizione dei pesi e per le altre necessità della valutazione. La gerarchia indotta dalla soluzione conforme sarà detta a sua volta *conforme*, come pure le corrispondenti relazioni di precedenza e discendenza.

LE SOLUZIONI DELLO STUDENTE

Considerato un sottoproblema, lo studente può scegliere liberamente gli altri sottoproblemi da usare per risolverlo. Supponiamo che lo studente risolva Q usando dei sottoproblemi diversi da quelli conformi. Così facendo, anche la soluzione dello studente imporrà una gerarchia sulla collezione dei sottoproblemi che, a differenza di quella conforme, potrà essere parziale o addirittura ciclica. Infatti, se lo studente può scegliere i sottoproblemi da usare, potrà innescare dei cicli, come risolvere Q usando P e viceversa. La discussione sui cicli sarà ripresa nel seguito.

Correttezza dei risultati

Stabilita la natura procedurale delle soluzioni dello studente, è immediato definire un criterio di correttezza basato sulla coincidenza dei risultati prodotti. Considereremo corretta una soluzione che produce gli stessi risultati della soluzione conforme. La coincidenza dei risultati potrà essere stabilita in modo probabilistico su un numero significativo di campioni dei parametri (Ashton et al., 2006) o con procedimenti formali, magari adottando un Computer Algebra Systems (CAS) come descritto da Sangwin (2012).

Per precisare lo schema di valutazione della correttezza, consideriamo un sottoproblema Q e assumiamo che i risultati corretti per Q siano quelli calcolati dalla sua soluzione conforme applicata ai risultati corretti per i sottoproblemi che Q usa. Supponiamo che lo studente abbia dato una soluzione $\mathbf{S}_q$ che usa $P_1, \ldots, P_k$, in generale diversi dai precedenti conformi. La soluzione $\mathbf{S}_q$ sarà considerata corretta se, applicata ai risultati corretti di $P_1, \ldots, P_k$, produce dei risultati corretti per Q. Altre caratteristiche delle formule (o regole che siano) non sono qui considerate. Si trascurano, quindi, aspetti come la compattezza, l'eleganza o l'efficienza della soluzione. Tali aspetti, d'altronde, sono difficilmente conciliabili con la valutazione automatica. È evidente che la correttezza dei risultati prodotti dalla soluzione dello studente potrà essere controllata indipendentemente dal fatto che egli abbia risolto i sottoproblemi usati. Quest'impostazione amplia lo spettro delle soluzioni parziali ammissibili e può stimolare l'autonomia e la capacità di astrazione degli studenti.

IDEE PER UNA VALUTAZIONE AUTOMATICA

Una regola di valutazione automatica, dovendo tener conto sia della soluzione conforme sia di quanto è riuscito a fare lo studente, non può essere del tutto banale. Ci arriveremo dopo una riflessione sui pesi da attribuire ai sottoproblemi e l'analisi degli usi dello studente, in special modo quelli non previsti dalla soluzione conforme.

Validità dei pesi

Come già accennato, i pesi dei sottoproblemi esprimono l'impegno necessario per risolverli utilizzando i precedenti conformi. Lo studente, però, può ignorare la soluzione conforme, scegliendo liberamente i sottoproblemi da usare. Ne consegue che il merito da attribuire per la soluzione di Q dipenderà da $\mathcal{P}(Q)$, dai precedenti (conformi o no) usati e da quelli (conformi) non usati. Per focalizzare l'attenzione su questo, nel seguito considereremo delle regole di valutazione basate esclusivamente sulla conoscenza dei sottoproblemi risolti e dei riferimenti effettuati.

Soluzioni "prodighe"

Diremo *prodiga* una soluzione che non usa alcuni dei suoi precedenti immediati conformi, "rinunciando" ai corrispondenti vantaggi. Una soluzione è quindi massimamente prodiga quando non usa alcun sottoproblema e la diremo *autonoma*. Se lo studente risolve un sottoproblema Q senza usare un precedente P, il merito può essere superiore al solo peso di Q, poiché $\mathcal{P}(Q)$ è condizionato al fatto che Q usi P. Infatti, lo studente ha presumibilmente individuato una soluzione per Q diversa da quella conforme, sviluppando la quale potrebbe aver impiegato delle competenze affini a quelle richieste da P. Si terrà conto di questo introducendo un *coefficiente d'uso* $\mathcal{U}(Q, P)$ per ogni coppia (Q, P) con $Q>P$ (Fabrizio, Fiorentino, & Pacini, 2011). Intuitivamente, il coefficiente d'uso indica che, se risolvendo Q non si usa il suo precedente immediato P, la soluzione data per Q meriterà almeno $\mathcal{P}(Q)+\mathcal{U}(Q, P)\cdot\mathcal{P}(P)$, con $0<\mathcal{U}(Q, P)\leq 1$. Più in generale, la soluzione di Q potrà meritare qualcosa di aggiuntivo per ogni precedente conforme di Q che non sia stato usato dallo studente.

Soluzioni "ingorde"

Diremo invece *ingorda* una soluzione che usa dei sottoproblemi che, nella gerarchia conforme, sono suoi discendenti. Tale soluzione si avvale quindi di informazioni che vanno oltre a quelle considerate per determinare i pesi. Infatti, il risultato di un discendente Q può contenere informazioni che permettono di risalire al risultato di un suo precedente P con un impegno inferiore a $\mathcal{P}(P)$. È comunque possibile che un discendente non sia di alcun aiuto per risolvere il precedente. Distingueremo i vari casi introducendo i *coefficienti d'inversione*. Si avrà un coefficiente d'inversione $\mathcal{I}(P, Q)$ per ogni coppia (Q, P) con $Q>P$. Il coefficiente d'inversione $\mathcal{I}(P, Q)$ misura quanto l'uso del risultato di Q faciliti la soluzione di P, di modo che il merito per la soluzione di P va ridotto moltiplicandolo per 1-$\mathcal{I}$(P, Q). Quindi, porre $\mathcal{I}$(P, Q)=1 vuol dire che il risultato di Q contiene informazioni tali da poter ricostruire facilmente quello del suo precedente P. In questo caso, diremo che Q è un *inverso* di P.

Alcune difficoltà

L'introduzione dei coefficienti d'uso e d'inversione è solo il primo passo per la definizione di una regola automatica di valutazione di soluzioni parziali. Per meglio comprendere le difficoltà, consideriamo gli esempi illustrati nelle Figure 4 e 5, dove i sottoproblemi risolti sono pieni, gli usi conformi (coi loro coefficienti) sono indicati con delle frecce, le inversioni (coi loro coefficienti) sono tratteggiate e gli usi dello studente sono punteggiati.

Con riferimento all'esempio della Figura 4, in virtù della soluzione di A si dovrebbe attribuire la frazione $a \cdot \mathcal{P}$(C) del peso del sottoproblema C, nonché la frazione $b \cdot \mathcal{P}$(C) in virtù della soluzione di B. Una regola di valutazione dovrebbe poi stabilire come combinare le due attribuzioni confluenti su C. Ragionevolmente, la combinazione dovrebbe dare un valore compreso tra MAX(a, b)$\cdot \mathcal{P}$(C) e MIN(1, $a+b$)$\cdot \mathcal{P}$(C). Per il sottoproblema D non spetta alcun merito in virtù di A, poiché A ha usato D, ma ne spetterebbe in virtù di B. In quest'ultimo caso, la regola dovrebbe fornire un criterio per combinare la cascata dei coefficienti d'uso b e c.

Con riferimento alla Figura 5, poiché nel risolvere A è stato usato il suo discendente C, a A si attribuisce solo una frazione del suo peso pari a (1-α)$\cdot \mathcal{P}$(A), dove $\alpha = \mathcal{I}$(A, C) è il coefficiente di inversione. Nel risolvere B sono stati usati i discendenti C e D, cosicché, per precisare quanto attribuire a B, la regola di valutazione dovrebbe stabilire come combinare i coefficienti di inversione β e γ.

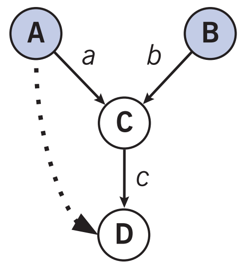


Figura 4. *Combinazione di coefficienti d'uso.*

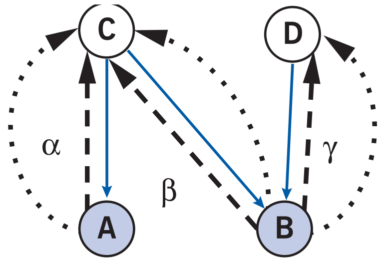


Figura 5. *Combinazione di coefficienti d'inversione.*

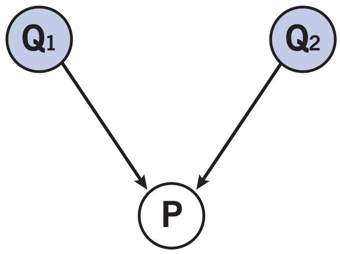


Figura 6. *Una soluzione ridondante.*

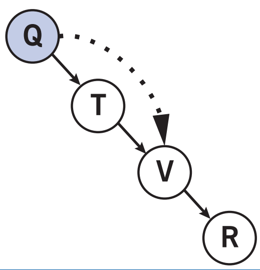


Figura 7. *Uso di un precedente non immediato.*

IL MODELLO 0-1

La discussione precedente testimonia che una regola di valutazione generale, dovendo tener conto di una casistica varia e solo parzialmente illustrata dagli esempi, non può essere banale. Tuttavia, le difficoltà si riducono se si adotta uno schema particolare (detto *Modello* 0-1 nel seguito) in cui:

- tutti i coefficienti d'uso sono unitari;
- tutti i coefficienti d'inversione sono unitari o nulli.

In queste ipotesi, ogni precedente serve integralmente per la soluzione dei suoi discendenti. Inoltre, se nel risolvere un sottoproblema P si usa un suo discendente, i meriti derivanti dalla soluzione di P rimangono integri oppure si azzerano. Il modello suggerisce in modo naturale le formule per la confluenza e la cascata: nel caso di coefficienti binari a e b, la regola di combinazione per la confluenza sarà MAX(a, b), quella per la cascata sarà semplicemente $a \cdot b$; in entrambi i casi si ottengono ancora valori binari.

Introduciamo ora una regola di valutazione automatica per il Modello 0-1. Questa sembra il punto di partenza più adatto per la ricerca di regole applicabili ai coefficienti d'uso e d'inversione frazionari. Presenteremo la regola in due tempi, supponendo inizialmente che i coefficienti d'inversione siano tutti nulli. Ci arriveremo esaminando due situazioni tipiche. La prima, illustrata in Figura 6, solleva la questione che eventuali soluzioni prodighe possano causare una "ridondanza" d'impegno risolutivo. La seconda, in Figura 7, riguarda il caso di una soluzione che non usa i precedenti immediati, ma qualcuno dei precedenti di secondo livello.

Consideriamo il caso illustrato in Figura 6, con tre sottoproblemi P, Q_1 e Q_2, tali che Q_1>P e Q_2>P, e

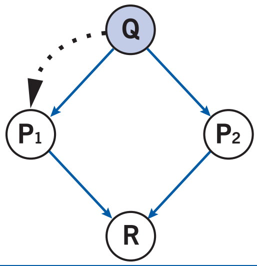


Figura 8. *Un precedente attribuito nonostante l'uso.*

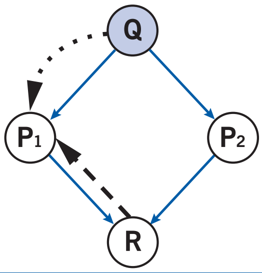


Figura 9. *Un precedente non attribuibile*.

supponiamo che Q_1 e Q_2 siano stati risolti autonomamente. Visto che i coefficienti d'uso sono tutti unitari, la soluzione autonoma di Q_1 merita almeno $\mathcal{P}(Q_1)+\mathcal{P}(P)$. Un fatto simile vale anche per Q_2. La soluzione nel suo complesso è però ridondante, in quanto la soluzione conforme prevede di risolvere P (una volta sola) e di usarlo due volte. Questo lascia intuire che $\mathcal{P}(P)$ va attribuito una volta sola. Analogamente, si avrà una ridondanza anche quando Q_1 e P siano entrambi risolti in modo autonomo.
Con riferimento alla Figura 7, supponiamo che Q sia all'apice della sequenza di discendenze Q>T>V>R e che Q sia stato risolto usando V. La soluzione di Q, non avvalendosi di T, è prodiga e quindi merita più di $\mathcal{P}(Q)$. Però Q usa V che è un suo precedente (non immediato). L'aver usato V invece di T permette di attribuire $\mathcal{P}(T)$ ma non $\mathcal{P}(V)$. Rimane il dubbio su come considerare il precedente R, che non è stato usato. Per dirimere la questione, si noti che, ai fini della soluzione conforme di Q, il risultato di R è utile per risolvere V, dove esaurisce il suo scopo (altrimenti sarebbe usato anche da Q o da T). Ai fini di Q, quindi, l'uso di V, rende superflua sia la sua soluzione che quella di R, per cui nemmeno $\mathcal{P}(R)$ va attribuito.
Nel seguito chiameremo *catena* una sequenza di discendenze conformi del tipo $P_1 > \cdots > P_k$ e la indicheremo come $\mathcal{C} : P_1 > \cdots > P_k$, con $k \geq 1$. Con tale notazione, la regola di valutazione automatica, quando i coefficienti d'inversione sono tutti nulli, si può formulare come segue:

> Per ogni sottoproblema P, risolto o no, il suo peso $\mathcal{P}(P)$ è attribuito allo studente se esiste almeno una catena $\mathcal{C} : Q > \cdots > P$ tale che Q è stato risolto senza usare sottoproblemi in $\mathcal{C}$ (estremi inclusi).

In tal caso, diremo che P è *attribuito secondo la catena* $\mathcal{C}$. È ovvio che quando la catena si riduce al solo P questo deve essere risolto. È evidente che, in presenza della soluzione autonoma di un sottoproblema Q, la Regola assegna $\mathcal{P}(Q)$ insieme ai pesi di tutti i suoi precedenti. È altrettanto facile verificare che, applicando Regola agli esempi 3 e 4, la valutazione ottenuta concorda con l'analisi effettuata. A ulteriore chiarimento, consideriamo un esempio più complesso.
Siano $Q>P_1$, $Q>P_2$ e $P_1>R$, $P_2>R$ nella soluzione conforme. Supponiamo, inoltre, che Q sia stato risolto usando P_1, come illustrato in Figura 8, allora R non viene attribuito secondo la catena $\mathcal{C}_1 : Q>P_1>R$, ma secondo la catena $\mathcal{C}_2 : Q>P_2>R$. In sostanza, la Regola ammette che, nonostante la soluzione di Q usi P_1, un impegno pari a $\mathcal{P}(R)$ sia comunque necessario, in quanto per risolvere Q bisogna risolvere P_2 che a sua volta richiede la soluzione di R.
Il completamento della regola di valutazione, al caso del Modello 0-1 con inversioni non tutte nulle, è quasi immediato considerando che, quando si usa un sottoproblema Q, in pratica si stanno usando tutti i sottoproblemi dei quali Q è inverso. Infatti, i coefficienti d'inversione tutti pari a 1 fanno sì che l'inversione si propaghi integralmente. Diamo anche per scontato che ogni sottoproblema sia l'inverso di sé stesso. In questo caso la regola di valutazione automatica si può formulare come segue:

> Per ogni sottoproblema P, $\mathcal{P}(P)$ viene attribuito se esiste una catena $\mathcal{C} : Q > \cdots > P$, tale che Q è stato risolto senza usare alcun inverso dei sottoproblemi in $\mathcal{C}$.

È evidente che l'uso dei sottoproblemi inversi può ridurre la valutazione fino ad annullarla. L'effetto massimo si ha quando la soluzione di un sottoproblema Q usa un suo inverso, nel qual caso non viene attribuito né Q né alcuno dei suoi precedenti.
Riprendiamo l'esempio 5 aggiungendo l'ipotesi che P_1 sia un inverso di R, come illustrato in Figura 9. In questo caso, poiché Q usa P_1, che è un inverso di R, $\mathcal{P}(R)$ non può essere attribuito nemmeno secondo la catena $Q>P_2>R$.
È facile verificare che la Regola 0-1 garantisce che, all'aumentare dei sottoproblemi correttamente risolti, il merito può solo aumentare e che può solo diminuire all'aumentare degli usi. Intuitivamente, se lo studente risolve un altro sottoproblema, la valutazione non potrà che andare di pari passo col risultato ottenuto. Per contro, usare più sottoproblemi non può che ridurre l'impegno richiesto e quindi la valutazione.

RIFERIMENTI INVERSI

Torniamo all'esempio illustrato in Figura 1 e Figura 2. Secondo il grafo conforme, il sottoproblema (F) si risolve usando (D) e (E). Tuttavia, è facile vedere che può essere risolto usando il discendente (G) e Seq. B; infatti, basta scrivere la formula seguente

=SE(G3<>"-"; B3; "-") (1)

nella cella F3 e trascinarla nell'intervallo F3:F10. Si tratta di un evidente caso d'inversione che va esplicitamente segnalato, come in Figura 10. In assenza d'inversione, la Regola 0-1 assegnerebbe una valutazione uguale a $\mathcal{P}((F))$ più i pesi $\mathcal{P}((D))$ e $\mathcal{P}((E))$ dei due suoi precedenti conformi. In tal modo, la formula 1, tutto sommato elementare, sarebbe valutata come una soluzione autonoma di (F), che invece richiederebbe un'attenta composizione delle formule scritte nelle colonne D, E e F della Figura 1. Dopo aver invertito la dipendenza conforme tra (G) e (F) con la formula 1, il sottoproblema (G) può essere a sua volta risolto senza usare (F) con la formula seguente

=SE(E(D3>0; E3=1); D3; "-")

da inserire nella cella G3 e trascinare in G3:G10. Ne derivano i riferimenti illustrati in Figura 11, con i quali la Regola 0-1 assegna una valutazione pari a $\mathcal{P}((G))+\mathcal{P}((F))$. S'intende che i sottoproblemi (D) e (E) non sono attribuiti, perché usati nella soluzione di (G).

In pratica, risolvendo i sottoproblemi (F) e (G) in modo conforme o in modo inverso si ottiene la stessa valutazione. Potremmo dire che la Regola 0-1 riconosce che, se lo studente ha risolto (F) con poca fatica approfittando del risultato del sottoproblema inverso (G), egli ha poi risolto un equivalente di (F) risolvendo (G) senza usare (F). Se poi lo studente risolve anche i sottoproblemi (D) e (E) in un modo qualsiasi, la valutazione torna piena, anche quando la sua soluzione non coincide strutturalmente con quella conforme.

SOLUZIONI CICLICHE

Supponiamo ora che, dopo aver risolto (F) con la formula 1, il sottoproblema (G) fosse risolto in modo conforme. In questo caso, la soluzione dello studente produrrebbe un ciclo (si veda Figura 12) e la Regola 0-1 ridurrebbe la valutazione al solo $\mathcal{P}((G))$. Se poi anche (D) e (E) fossero risolti, si aggiungerebbe $\mathcal{P}((D))+\mathcal{P}((E))$, continuando però a escludere $\mathcal{P}((F))$. In questo caso, la presenza del ciclo comporta una perdita non recuperabile, neppure risolvendo tutti gli altri quesiti.

Per finire, supponiamo che i sottoproblemi (D), (F) e (G) siano risolti in modo conforme e che (E) sia risolto con la formula seguente

=SE(F3<>"-"; 1; CONTA.SE(B$3:B3; B3))

dove il riferimento a F evita solo qualche conteggio. In questo caso, la Regola 0-1 attribuisce una valutazione piena, nonostante il ciclo mostrato in Figura 13. L'apparente generosità si spiega in quanto la soluzione di (E) provoca il ciclo facendo uso del suo discendente (F), che però non è un suo inverso. Infatti, il riferimento a F non semplifica la formula per risolvere (E).

Detto questo, resta innegabile che i cicli, concettualmente prima ancora che fattualmente, sono

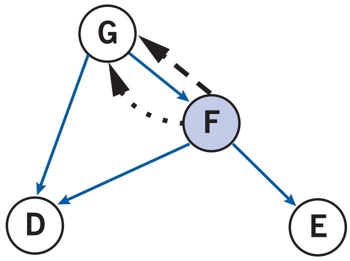


Figura 10. *Uso di un inverso.*

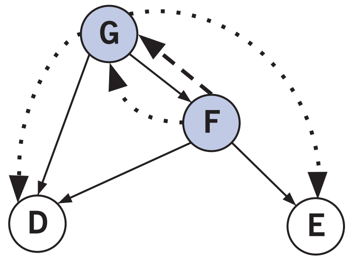


Figura 11. *Una soluzione che supera l'inversione.*

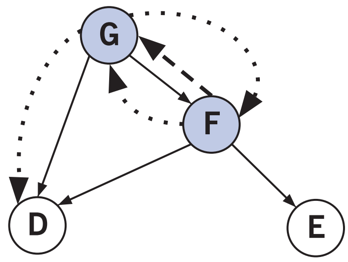


Figura 12. *Un ciclo penalizzante.*

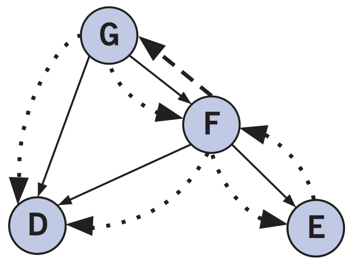


Figura 13. *Un ciclo non penalizzante.*

incompatibili con il *divide et impera* (e forse con ogni altra strategia risolutiva). Si può allora affiancare alla Regola di valutazione una procedura che, rilevati i cicli, li sanzioni più o meno severamente.

CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

Il lavoro analizza uno schema di valutazione automatica per le soluzioni parziali di esercizi di problem solving, dove lo studente mostra le sue capacità di analisi e sintesi di fronte a problemi non banali. S'introduce una regola di valutazione automatica (Regola 0-1) adatta a una classe di problemi che si sono dimostrati efficaci (Fabrizio et al., 2006) e realistici nel senso che le condizioni del Modello 0-1 sono ragionevoli in molti ambiti. Infatti, l'ipotesi che ogni sottoproblema sfrutti completamente i risultati dei suoi precedenti immediati si verifica spesso. Che i coefficienti d'inversione siano altrettanto frequentemente binari è forse meno realistico. Per esempio, anche nel caso dell'inversione tra (F) e (G) in Figura 10, la scrittura della formula 1 richiede comunque un minimo d'impegno. In ogni caso, tali situazioni possono essere approssimate forzando alcuni coefficienti d'inversione a 1 e altri a 0. Se un coefficiente d'inversione viene forzato a 1, le valutazioni saranno temporaneamente inferiori al dovuto, evitando in ogni caso di concedere oltre il merito effettivo. D'altra parte, come illustrato in Figura 11, ogni "ritenuta" subita dallo studente può essere recuperata risolvendo (senza cicli) i sottoproblemi inversi usati.

La valutazione, sia essa sommativa o formativa, è un passaggio fondamentale di ogni intervento didattico. La progettazione per competenze, che mira a disegnare i contenuti in funzione degli obiettivi formativi, attribuisce un'importanza ancor maggiore alla valutazione. In quest'ottica, la valutazione parziale, col modello attuativo qui presentato, ben s'inserisce tra gli strumenti in grado di aumentare, per ampiezza e precisione, la capacità di analisi e valutazione dei risultati, consentendo così l'implementazione di modelli didattici incentrati sul discente e sulla verifica delle competenze acquisite.

Con l'approccio proposto il docente può progettare e realizzare percorsi didattici finalizzati allo sviluppo delle capacità di problem solving. La suddivisione in sottoproblemi e la valutazione delle soluzioni parziali permettono, infatti, di adottare problemi più realistici e di valutare più finemente le capacità individuali. Il percorso potrà poi prevedere l'aumento della granularità dei sottoproblemi e l'uso di suggerimenti nella forma di ulteriori suddivisioni dei sottoproblemi che lo studente non è in grado di risolvere.

L'esempio discusso nell'articolo mostra il Modello 0-1 all'opera coi fogli di calcolo. È facile immaginare come possa essere applicato anche all'interrogazione delle basi di dati e a un ambiente interattivo come GeoGebra, oppure alla programmazione, dove i sotto-programmi sono i principali blocchi organizzativi (Fiorentino, 2010). Per quanto riguarda gli sviluppi futuri, il Modello 0-1 è il primo passo verso schemi più generali, caratterizzati da coefficienti d'uso e d'inversione frazionari. Un'altra direzione di indagine prevede di considerare più soluzioni conformi (soluzioni alternative); la regola di valutazione dovrà in questo caso combinare opportunamente le diverse stime. La ricerca lungo queste due strade è in corso e ha cominciato a produrre i primi risultati.

BIBLIOGRAFIA

Ashton, H. S., Beevers, C. E., Korabinski, A. A., & Youngson, M.A. (2006). Incorporating partial credit in computer-aided assessment of Mathematics in secondary education. *British Journal of Educational Technology, 37*(1), 93-119.

Ashton, H., Beevers, C., & Thomas, R. (2008). Can e-assessment become mainstream? In *Proceedings of the 12th Computer Assisted Assessment Conference*. Loughborough University.

Assessment Reform Group (2002). *Assessment for learning: 10 principles*. British Educational Research Association.

Baldacci, M. (2010). *Curricolo e competenze*. Milano, Italia: Mondadori.

Black, P. J., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5-31.

Butcher, P., Hunt, T., & Sangwin, C. (2013). Embedding and enhancing eAssessment in the leading open source VLE. In *Proceedings of the HEA STEM Conference*. Higher Education Academy.

Cerval-Pena, E. R., Hermans, D. F. M., & Sangwin, C. J. (2008). Automatic assessment of steps in students' work. In *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*. ICME-11.

Conati, C., (2009). Intelligent Tutoring Systems: new challenges and directions. In *Proceedings of the 21th International Joint Conference on Artificial Intelligence*. Menlo Park, CA: AAAI Press.

Crooks, T. (2001). *The validity of formative assessments*. British Educational Research Association Annual Conference. University of Leeds.

Fabrizio, A., Fiorentino, G., & Pacini, G. (2006). Valutazione automatica di test con risposta aperta. *TD Tecnologie Didattiche, 14*(2), 52-61.

Fabrizio, A., Fiorentino, G., & Pacini, G. (2011). Valutazione automatica delle abilità di problem-solving. In *Atti del convegno Didamatica 2011*, Torino.

Fiorentino, G. (2010). A result-driven approach to the design of self-regulated problem-solving environments. In *Proceedings of the STELLAR-TACONET Conference*. Aachen, Belgium: Shaker Verlag.

Fife, J. H. (2011). *Automated scoring of CBAL Mathematics tasks with m-rater*. Research Memorandum, ETS RM-11-12.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2. ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Sangwin, C. (2012). Computer aided assessment of Mathematics using STACK. In *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. ICME-12.

Shores, L. R., Hoffmann, K. F., Nietfeld, J. L., & Lester, J. C. (2012) The role of sub-problems: supporting problem solving in narrative-centered learning environments. *Intelligent Tutoring Systems. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7315*. Berlin, Germany: Springer Verlag.

Ufficio Scolastico Regionale per la Lombardia (2013). *La Didattica per competenze.* Dossier, Ufficio Scolastico Regionale per la Lombardia, Ufficio IV.

Vanlehn, K. (2006). The behavior of tutoring system. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 16*(3), 227-265.